This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

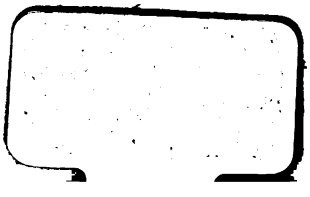
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



MATHEMATISCHE

MITTHEILUNGEN

von

Dr J. L. RAABE,
Professor.

ERSTES HEFT.

ZÜRICH,
VERLAG VON MEYER & ZELLER.
1857.

182. e. 17.

Druck von E. Kiesling.

Unter dem Titel des vorliegenden ersten Heftes werde ich auch in der Folge theils neue und eigene analytische Arbeiten, wie ich sie bis anher in Zeitschriften mitzutheilen pflegte, theils aber auch schon bekannte Theile der Analysis veröffentlichen, wo mehr der Entwickelungsgang als der Inhalt der Mittheilung den beachtenswerthen Theil abgeben wird.

Auf demselben Weg der Mittheilung gedenke ich auch Vereinfachungen und Berichtigungen zu meinem Werke über Differenzial- und Integralrechnung zu veröffentlichen, wobei mir die Supplemente von Lacroix zu seinem grössern Werke gleichen Titels vorschweben.

Betreffend das vorliegende erste Heft gehört sein Inhalt den beiden zuerst erwähnten Theilen an, über welche das Inhaltsverzeichniss, wie das überall beigesetzte Vorwort den erwünschten, vorläufigen Aufschluss gewähren.

Zürich, im Januar 1857.

I.

Deutung bestimmter einfacher Integrale mit complexen Integrationsgrenzen.

VORWORT.

Auch in einer logisch geordneten Wissenschaft, deren sämmtliche Glieder einen gemeinsamen, ganz einleuchtenden Ausgangspunkt haben, wird man auf Fragen bisweilen geführt, die den bereits festgestellten oder begründeten Theilen derselben nicht leicht bei- oder unterzuordnen sind. Solche Fragen sind aber dann als schwebende, oder als noch zu erledigende so lange offen zu halten, bis im Laufe der Zeit Anknüpfungspunkte an schon festgestellte Begriffe für sie gefunden oder, wenn dieses nicht angeht, ihre Erledigung aber als ein Bedürfniss erkannt wird, durch Einführung eines neuen Begriffes, der auf eine neu einzuführende Anschauungsweise ruht, gleichwohl aber im Gesammtbau der betreffenden Wissenschaft seine Wurzeln hat, derselben als neues selbständiges Glied einverleibt wird.

Der grössern Deutlichkeit wegen, mich aber allerdings auf meine Wissenschaft beschränkend, lasse ich einige Fälle zur Beleuchtung des eben Mitgetheilten folgen.

Wenn man beim gegliederten Fortschreiten dieser Wissenschaft aus ihrem ersten Anfange auf die Operation des Radicirens geführt wird, und etwa die Bestimmung von $\sqrt{2}$ vorzunehmen hat, da überzeugt man sich sehr bald, dass es hiefür weder eine ganze noch eine gebrochene Zahl geben kann; daher denn eine Frage über die Natur der Einheit, die $\sqrt{2}$ darstellt, offen wird. Da Fragen dieser Art in grosser Anzahl sich darboten, sonach ihre Erledigung als dringlich erkannt ward, — so wandte man sich zuletzt der ideellen Anschauung einer unendlich kleinwerdenden Einheit zu, mittelst der alle diese Fragen vollständige Erledigung fanden.

Die Fragen, die in der Operation des Dividirens liegen, hatten die Einführung der gebrochenen Einheit, als Gegenstand des Zählens der reinen Mathematik zur Folge.

Ebenso führten die Fragen, die in der Operation des Subtrahirens liegen, zuerst auf die Idee einer negativen Einheit und folglich auch auf negative Zahlen.

In diesen vorgeführten Fällen sah man sich zur Einführung neuer Begriffe und der ihnen zu Grunde liegenden Anschauungen durch die hohe Wichtigkeit der betreffenden Fragen gedrängt.

Führen wir auch einen Fall vor, der sich eine geraume Zeit ähnlich wie die vorausgeschickten darstellte, schliesslich aber gleichwohl bereits bestehenden Anschauungsweisen und Begriffen untergeordnet werden konnte.

Eine allgemeine, algebraisch rationale und ganze Gleichung einer Unbekannten x, die den vierten Grad überschreitet, ist ein bis jetzt noch nicht gelöstes Problem. Noch mehr, es existiren sogar Beweise, dass der Werth von x durch keine algebraische Function der Coefficienten der Gleichung angebbar sei. Da aber eine Antwort auf die durch die Gleichung gestellte Frage, betreffend die Natur von x, gleichwohl verlangt ward, so lag, meiner Meinung nach, auch der Gedanke gar nicht fern, Zahlen für x zu vermuthen, deren Einheit auf keine der bis jetzt bekannten oder deren Combinationen zurückzubringen möglich sei. Diese sehr lange Zeit offen gestandene Frage oder Vermuthung ist in unserer Zeit verneinend entschieden worden. Man weiss jetzt mit aller wissenschaftlichen Strenge, dass der gesuchte Werth von x oder die Wurzel der in Rede stehenden Gleichung eine sogenannte complexe Zahl sei; sie ist nämlich immer von der Form $a + bi$, wo i die imaginäre Einheit, a und b aber, wenn gleich noch unbekannt, sind immer reeller Beschaffenheit oder ruhen auf reelle Einheiten.

Nach dieser dem vorliegenden Gegenstande scheinbar fremden Abschweifung von dem uns in der Ueberschrift gesetzten Ziele wenden wir uns demselben zu, schicken aber die Bemerkung gleich voraus, dass ein bestimmtes Integral einer Differenzialformel $f(x)dx$ mit complexen Integrationsgrenzen nach dem gegenwärtigen Stand der Wissenschaft zu den Fragen gehören dürfte, von denen wir im Vorausgeschickten gesprochen. So ein Integral ist nach der bis jetzt anerkannten Anschauung und Begriffsbestimmung eines bestimmten Integrals keiner den Inhalt desselben involvirenden Deutung zulässig. Wir wissen nämlich nicht, was mit der Redensart, die bei den reellen

Integrationsgrenzen a (die untere) und A (die obere) einen klaren unzweideutigen Sinn hat, und etwa so lautet: „Das bestimmte Integral sei von $x = a$ bis $x = A$ auszudehnen," womit nämlich eine Summation der betreffenden Differenzialformel $f(x)dx$ über alle Werthe von $x = a$ bis $x = A$ verstanden wird, — wir wissen nicht, sage ich, was mit dieser Phrase anzufangen sei, falls diese Integrationsgrenzen a und A complexe Zahlen sind. Während in dem ersten Falle, wo a und A reell sind, ein Uebergang von dem einen Werth a zu dem andern A, gleichsam wie von einem Punkte zu einem andern auf derselben Linie erscheint, hört dieser e i n e vorgezeichnete Weg auf, wenn die Integrationsgrenzen complexer Beschaffenheit sind, welches offenbar darin seinen Grund hat, dass die beiden Bestandtheile einer complexen Zahl, die allerdings durch das algebraische Summenzeichen verbunden sind, heterogen zu einander sind, — also von einer Addition oder Subtraction derselben im gewöhnlichen Sinne (wo die einzelnen Bestandtheile oder Zahlen in ihre Einheiten gleicher Art aufgelöst und dann zu einer einzigen Zahl zusammen gefasst werden) nicht die Rede sein kann.

Für gewisse zu erzielende Zwecke sind allerdings vorgeschriebene, immer aber willkürliche Uebergänge von der einen complexen Integrationsgrenze zur andern gestattet, wie solches Cauchy und seine Nachfolger gethan. Es bleiben dieselben jedoch der eigentlichen Integralrechnung (wo es sich nämlich um die Werthung eines bestimmten Integrals innerhalb complexer Integrationsgrenzen handelt) der erwähnten Willkürlichkeit wegen so lange fremd, bis nicht deren Zusammenhang mit den elementaren Grundbegriffen eines bestimmten Integrals wissenschaftlich constatirt sein wird.

Es erinnert mich ein solches Integral mit complexen Integrationsgrenzen an einen analogen, schon in den ersten Elementen der Algebra auftretenden Fall. Nachdem man den elementaren Begriff einer Potenz mit ganzem, positivem Exponenten festgestellt hat, und dann eine Uebertragung dieses Begriffes auf die Fälle verlangt wird, wenn der Exponent negativ oder eine gebrochene Zahl ist. Ohne über die Art, wie diese Fragen erlediget worden sind, mich hier auszusprechen, hebe ich doch den Umstand mit besonderm Nachdruck hervor, dass die gewonnenen Erledigungen mit dem Grundbegriffe der Potenz sammt ihrem Gegensatze im innigsten Zusammenhange stehen.

In ähnlicher Weise glaube ich den in der Ueberschrift angedeuteten Gegenstand erledigt zu haben, wie solches im Folgenden, namentlich in Nr. 5 nach vorhergegangener Motivirung in gedrängter

Uebersicht zusammengestellt worden ist. Den Beschluss der vorliegenden Mittheilung machen einige kleinere Anwendungen, deren Endergebnisse zwar nicht neu, gleichwohl Beachtung verdienen.

---

1. Wenn man durch die Operation des Differenzirens auf die Gleichung:

$$d \cdot F(x) = f(x)\,dx \qquad (1)$$

geführt wird, wo $f(x)$ und $F(x)$ Functionen von x repräsentiren; wenn ferner a und A reelle Zahlen sind, innerhalb welcher die Function $F(x)$ continuirlich ist, oder, was auf dasselbe hinausläuft, wenn der Differenzialausdruck $f(x)\,dx$ für jeden innerhalb besagter Grenzen enthaltenen reellen Werth von x unendlich kleinwerdend ist, wobei dx den unendlich kleinwerdenden Unterschied je zweier aufeinander folgenden dieser Zwischenwerthe vorstellt (welchen Ausdruck dx ich sehr oft durch ω darstelle): so stellt, wie bekannt, der Ausdruck $F(A) - F(a)$ die Summe aller dieser so eben angedeuteten unendlich kleinwerdenden Werthe von $f(x)\,dx$ dar. — Betreffend das unendlich kleinwerdende Intervall dx oder ω kann solches von einem Intervall zum andern, ohne die unerlässliche Eigenthümlichkeit des unendlichen Kleinwerdens abzulegen, variiren oder auch constant bleiben. Meistentheils tritt jedoch ω im letztern Sinne auf.

In jeder bessern Schrift über Integralrechnung wird man von der Richtigkeit des Vorausgeschickten genügenden Aufschluss erhalten, wenn, wie gesagt, die Zahlen a und A, als die Integrationsgrenzen des bestimmten Integrals $\int_a^A f(x)\,dx$, reeller Beschaffenheit sind.

2. Sind die Integrationsgrenzen eines bestimmten Integrals rein imaginär, Zahlen nämlich, denen die imaginäre Einheit $i\,(=\sqrt{-1})$ zu Grunde liegt, die, wenn a und A die Grössen dieser Zahlen sind, durch ai und Ai dargestellt sein werden; so besteht alles im Vorausgeschickten Mitgetheilte ungeschmälert in voller Klarheit und Richtigkeit, mit der einzigen ganz natürlichen Abweichung, dass sämmtliche Zwischenwerthe, wie der unendlich klein werdende Unterschied des einen dieser Zwischenwerthe zu seinem nächstfolgenden derselben Natur wie die Integrationsgrenzen selbst, nämlich rein imaginär sind. Der Sinn eines bestimmten Integrals sls Summe findet hier eine eben so einleuchtende Anschauung wie in dem Falle reeller Integrationsgrenzen, wie zur Erhärtung dieser Behauptung die folgende Doppelgleichung augenfällig darthut:

$$\int_{ai}^{Ai} f(x)\,dx = F(Ai) - F(ai)$$

$$= \omega i \left\{ \tfrac{1}{2} f(ai) + f(ai + \omega i) + f(ai + 2\omega i) + \cdots\cdots \right.$$

$$\left. + f(ai + (n-1)\omega i) + \tfrac{1}{2} f(Ai) \right\}, \quad (2)$$

in der $A - a = n\omega$ angenommen worden ist.

Dass hier kein besonderer Nachweis nöthig sei, geht aus dem allgemeinen Begriffe einer Zahl hervor, die als Ergebniss des Zählens mit einer Einheit anzusehen ist, deren Beschaffenheit, mit der einzigen Restriction, während des ganzen Aktes des Zählens dieselbe zu sein, ganz willkürlich ist.

Zum Ueberflusse füge ich noch bei, dass unter 0i ein Nichtdasein der imaginären Zahl zu verstehen sei; ferner hat man unter ωi eine unendlich kleinwerdende, und unter ∞i eine unendlich grosswerdende rein imaginäre Zahl zu verstehen.

3. Nunmehr wende ich mich dem eigentlichen Gegenstande vorliegender Mittheilung zu, wo die Integrationsgrenzen complexe Zahlen, oder mindestens nicht gleicher Beschaffenheit sind, d. h. wenn die untere Integrationsgrenze etwa reell, dann die obere eine rein imaginäre oder eine complexe Zahl u. dgl. m. sei.

Die inverse zur Operationsgleichung (1) ist folgende:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \text{Const.},$$

oder auch:

$$\int f(x)\,dx = F(x) - F(\alpha), \quad (1')$$

wo α eine beliebige Constante ist, d. h. wie immer beschaffen sein kann, wenn sie nur unabhängig von x festgehalten wird. Der Ausdruck rechterhand vom Gleichheitszeichen oder die Integralfunction verschwindet, wie augenfällig, bei $x = \alpha$; und wenn deren Werth für $x = \beta$ anzugeben ist, schreibt und hat man:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha),$$

wo β gleichwie α jedweder Beschaffenheit, reell, imaginär oder complex sein kann. Wird also $\alpha = a + bi$ und $\beta = A + Bi$ angenommen, wo a, b, A, B reelle Zahlen sind; so hat man auch:

$$\int_{a+bi}^{A+Bi} f(x)\,dx = F(A + Bi) - F(a + bi). \quad (3)$$

Dieser Zusammenhang nun, wo der Ausdruck linkerhand ein be-

stimmtes Integral innerhalb complexen Integrationsgrenzen ist, stellt den Fundamentalbegriff eines solchen Integrals dar; und wir werden in der folgenden Nr., unter der Voraussetzung, dass F(x) eine eindeutige Function auch für complexe Werthe von x repräsentirt, den Zusammenhang desselben mit gewissen Summen, analog denen bei reellen oder rein imaginären Grenzen, in ganz unzweideutiger Weise und frei von jeder Willkür feststellen.

4, Wenn A, b und B reelle Zahlen sind, so stellt das bestimmte Integral:

$$\int_{bi}^{Bi} f(x+A)\,dx,$$

nach Nr. 2, die Summe von $f(x+A)\,dx$ über alle rein imaginären Werthe von $x = bi$ bis $x = Bi$ ausgedehnt dar, wo der Uebergang von einem dieser Werthe zu seinem nächstfolgenden etwa durch $i\omega'$ dargestellt sein mag; stellt man alle diese Summanden her, so überzeugt man sich, dass dasselbe auch durch das bestimmte Integral:

$$\int_{A+bi}^{A+Bi} f(x)\,dx$$

erzielt wird, wo der Uebergang von einem Werthe zu seinem nächstfolgenden derselbe unendlich kleinwerdende rein imaginäre Ausdruck $i\omega'$ ist. Daher besteht folgende Doppelgleichheit:

$$\int_{A+bi}^{A+Bi} f(x)\,dx = \int_{bi}^{Bi} f(x+A)\,dx = F(A+Bi) - F(A+bi), \quad (4)$$

für sämmtliche reelle Zahlenwerthe von A, b und B.

Wenn ferner A und b dieselben bis jetzt gedachten reellen Werthe sind und denselben noch die reelle Zahl a beigegeben wird, so stellt das bestimmte Integral:

$$\int_{a}^{A} f(x+bi)\,dx,$$

nach Nr. 1, die Summe von $f(x+bi)\,dx$ über alle reelle Werthe von $x = a$ bis $x = A$ ausgedehnt dar, wo der Uebergang von einem dieser Werthe zu seinem nächstfolgenden durch ω angedeutet sein soll; stellt man auch alle diese Summanden her, so überzeugt man sich, dass dasselbe auch durch das bestimmte Integral:

$$\int_{a+bi}^{A+bi} f(x)\,dx$$

erzielt wird, wo der Uebergang von einem Werthe zu seinem nächstfolgenden dasselbe unendlich kleinwerdende und reelle Increment ω ist; sonach besteht auch folgende Doppelgleichheit:

$$\int_{a+bi}^{A+bi} f(x)\,dx = \int_{a}^{A} f(x+bi)\,dx = F(A+bi) - F(a+bi), \quad (5)$$

gleichfalls für sämmtliche reelle Zahlenwerthe von a, b und A.

Die Ergebnisse in (4 und 5) bieten durch Addition zunächst folgendes dar:

$$F(A+Bi) - F(a+bi) = \int_{a+bi}^{A+bi} f(x)\,dx + \int_{A+bi}^{A+Bi} f(x)\,dx. \quad (6)$$

Ganz in gleicher Weise, wie wir auf die Doppelgleichheiten in (4 und 5) geführt worden sind, gelangt man auch auf folgende:

$$\int_{a+bi}^{a+Bi} f(x)\,dx = \int_{bi}^{Bi} f(x+a)\,dx = F(a+Bi) - F(a+bi), \quad (4')$$

$$\int_{a+Bi}^{A+Bi} f(x)\,dx = \int_{a}^{A} f(x+Bi)\,dx = F(A+Bi) - F(a+Bi), \quad (5')$$

die als Gleichheiten für alle reelle Werthe a, b, A, B Bestand haben.

Addirt man auch hier, so gelangt man auf folgende coordinirte Gleichheit zu (6):

$$F(A+Bi) - F(a+bi) = \int_{a+bi}^{a+Bi} f(x)\,dx + \int_{a+Bi}^{A+Bi} f(x)\,dx, \quad (6')$$

die gleichfalls für alle reelle Werthe von a, b, A, B Bestand hat.*)

Mit diesen Ergebnissen in (6 und 6') ist die Schlussaussage vorangehender Nr. vollständig realisirt, wobei wir gegenwärtig noch darauf aufmerksam machen, dass je die zwei Bestandtheile rechterhand der Gleichheitszeichen in (6 und 6') an den durch folgende Gleichheit:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\beta} f(x)\,dx$$

ausgedrückten Satz aus den bestimmten Integralen mit reellen Grenzen erinnern, falls a eine innerhalb der reellen Zahlen α und β fallende reelle Zahl vorstellt.

5. Fassen wir alles über ein bestimmtes Integral mit complexen Integrationsgrenzen Gewonnene, sammt den unerlässlichen Beschränkungen, die von der Discontinuität herrühren, zusammen; so stellt sich Folgendes nunmehr als begründet heraus:

Wenn man die unbestimmte Integralgleichheit hat:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \text{Const.}, \quad (I)$$

*) Die nöthigen Einschränkungen im Falle der Discontinuität der unbestimmten Integralfunction sind vorderhand unbeachtet gelassen; ich komme jedoch in der nächstfolgenden Nr. auch auf diese zu sprechen.

wo für x jede Function von x gesetzt werden kann; so bietet sie nach den Betrachtungen in Nr. 3 folgende dar:

$$\int_{a+bi}^{A+Bi} f(x)\,dx = F(A+Bi) - F(a+bi), \qquad \text{(II)}$$

wo a, b, A, B beliebige reelle Zahlen sind und i die imaginäre Einheit vorstellt. Zugleich mit diesem Ergebnisse besteht jedes der beiden folgenden:

$$\int_{a+bi}^{A+Bi} f(x)\,dx =$$

$$\int_{a+bi}^{A+bi} f(x)\,dx + \int_{A+bi}^{A+Bi} f(x)\,dx = \int_{a}^{A} f(x+bi)dx + \int_{bi}^{Bi} f(x+A)dx, \qquad \text{(III)}$$

$$\int_{a+bi}^{A+Bi} f(x)\,dx =$$

$$\int_{a+bi}^{a+Bi} f(x)dx + \int_{a+Bi}^{A+Bi} f(x)dx = \int_{bi}^{Bi} f(x+a)dx + \int_{a}^{A} f(x+Bi)\,dx, \qquad \text{(III')}$$

falls folgende Bedingungen, die aus je den letzten zwei Gliedern dieser Gleichheiten entnommen werden, Bestand haben:

a. Es besteht (III) simultan mit (II):

1. Wenn die unbestimmte Integralfunction F(x) bekannt ist, falls F(x+bi) für alle reelle Werthe von x = a bis x = A, sowie auch F(x+A) für alle rein imaginären Werthe von x = bi bis x = Bi continuirlich verbleiben.
2. Wenn die unbestimmte Integralfunction F(x) unbekannt ist, falls die betreffenden Differenzialformeln f(x+bi)dx, f(x+A)dx für jeden der betreffenden Werthe von x, die mit denen in 1. bezüglich einerlei sind, jedesmal unendlich kleinwerdend erkannt werden.

b. Es besteht (III') simultan mit (II).

1. Wenn die unbestimmte Integralfunction F(x) bekannt ist, falls F(x+a) für alle rein imaginären Werthe von x = bi bis x = Bi, so wie auch F(x+Bi) für alle reellen Werthe von x = a bis x = A continuirlich verbleiben.
2. Wenn die unbestimmte Integralfunction F(x) unbekannt ist, falls die betreffenden Differenzialformeln f(x+a)dx, f(x+Bi)dx, für jeden der betreffenden Werthe von x, die mit den unmittelbar vorhergehenden bezüglich

einerlei sind, jedesmal unendlich kleinwerdend erkannt werden.

c. Es bestehen endlich sowohl (III wie III') simultan mit (II), wenn sowohl die ausgesprochenen Bedingungen in a. wie die in b. realisirt werden.

Anmerkung. Wenn die in (a, 1, 2) sowie in (b, 1, 2) ausgesprochenen Bedingungen ganz oder theilweise nicht realisirt werden, dann fällt das in Rede stehende bestimmte Integral mit den complexen Integrationsgrenzen, nämlich:

$$\int_{a+bi}^{A+Bi} f(x)\,dx,$$

in den Bereich jener, wo die Grundbegriffe der Differenzial- und Integralrechnung ein Ende haben, wo man allerdings die Gleichung (II) zur Bestimmung desselben unterlegen kann, wo aber die Bedeutung des Ergebnisses nicht mehr durch eine Summation der betreffenden Differenzialformel, wie es in der Integralrechnung üblich, wissenschaftlich zu motiviren möglich wird.

6. Dass der in (a. und b.) unmittelbar vorher festgestellte Unterschied unter den Ergebnissen in (III und III') eine wissenschaftliche Nothwendigkeit sei, leuchtet, vom theoretischen Standpunkt angesehen, zwar sofort ein; ich erachte es aber nicht für unnütz, solches bei einem concreten Falle noch mehr zur Anschauung zu bringen. Hiezu eignet sich sehr gut das bestimmte Integral:

$$\int_{0+\frac{i}{2}\sqrt{3}}^{1+i\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^3}.$$

Ohne auf das unbestimmte Integral hier besonders einzutreten, unterlegen wir die in (a. und b.) unter (2.) aufgestellten Bedingungen.

Nach (a. 2.) muss zuerst der Differenzialausdruck $\frac{dx}{1+(x+\frac{i}{2}\sqrt{3})^3}$ für alle reelle Werthe von x, so innerhalb 0 und 1 liegen, unendlich kleinwerdend sein; innnerhalb dieser Begrenzung liegt der Werth $x = \frac{1}{2}$, welcher den Nenner des betreffenden Bruches auf Null bringt. Wird also, wie man es bei bestimmten Integralen mit reellen Integrationsgrenzen thut, $x = \frac{1}{2} + \omega$ gesetzt, so geht der in Rede stehende Differenzialausdruck über in:

$$\frac{2}{3(-1+i\sqrt{3})+3(1+i\sqrt{3})\omega+2\omega^2},$$

welcher beim unendlichen Abnehmen von ω in $-\frac{1}{6}(1+i\sqrt{3})$ übergeht; und da dieser Ausdruck nicht unendlich kleinwerdend ist, so kann, ohne die zweite zu realisirende Bedingung weiter zu untersuchen, die Gleichheit in (III) nicht unterlegt werden.

Gehen wir nun zur Untersuchung über, ob die Gleichheit in (III') statthaft sei. — Nach der Mittheilung in (b. 2.) soll die betreffende Differenzialformel $\frac{\omega}{1+x^3}$ vorerst innerhalb der Werthe $0+i\sqrt{3}$ und $1+i\sqrt{3}$ beständig unendlich kleinwerdend sein, welches offenbar eintrifft, weil innerhalb dieser kein Werth existirt, der den Nenner $1+x^3$ auf Null bringt. Ferner soll als zweite Bedingung die gleiche Differenzialformel $\frac{dx}{1+x^3}$ für alle Werthe innerhalb $0+\frac{i}{2}\sqrt{3}$ und $0+i\sqrt{3}$ von x ebenfalls uuendlich kleinwerdend sein; und da hier der Uebergang von einem dieser Zwischenwerthe zum nächstfolgenden rein imaginär ist, so hat man in der erwähnten Beziehung den Differenzialausdruck $\frac{i\omega'}{1+x^3}$ zu untersuchen, wo wir die Grösse eines solchen Ueberganges durch $i\omega'$ vorgestellt haben. Da auch für diese Zwischenwerthe der Nenner $1+x^3$ nie in Null übergeht, so trifft auch diese Bedingung zu, — und wir haben vermöge (III') folgende richtige Gleichung:

$$\int_{0+\frac{i}{2}\sqrt{3}}^{1+i\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^3} = \int_{\frac{i}{2}\sqrt{3}}^{i\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^3} + \int_0^1 \frac{dx}{1+(x+i\sqrt{3})^3},$$

oder auch, um rechterhand nur reelle Grenzen zu haben:

$$\int_{0+\frac{i}{2}\sqrt{3}}^{1+i\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^3} = i\int_{\frac{1}{2}\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1-ix^3} + \int_0^1 \frac{dx}{1+(x+i\sqrt{3})^3}.$$

Die weitere Ausführung dieser Gleichung bietet noch manche Schwierigkeit des Calculs, aber keinerlei wissenschaftliches Interesse dar; daher wir solche fallen lassen.

Wir bemerken noch, dass wenn der Nenner $1+x^3$, statt der ersten Potenz, mit irgend einem echtgebrochenen Exponenten versehen wäre, dann die Bedingungen in (a.) wie die in (b.) sämmtlich realisirt sich herausgestellt hätten, wo wir dann den in (c.) erwähnten

Falle zur Anwendung zu bringen berechtiget wären. Es besteht sonach die Integralgleichung:

$$\int_{\frac{i}{2}\sqrt{3}}^{i\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{(1+x^3)^m} - \frac{1}{\left(1+(1+x)^3\right)^m} \right\} dx =$$

$$\int_0^1 \left\{ \frac{1}{\left[1+\left(x+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^3\right]^m} - \frac{1}{\left[1+(x+i\sqrt{3})^3\right]^m} \right\} dx,$$

falls m positiv ist, nur für echtgebrochene Werthe derselben.

7. In dem nicht selten eintretenden Fall (α.) zweitvorangehender Nr. gelangt man durch Vergleichung der Ergebnisse in (III und III') auf folgenden Zusammenhang:

$$\int_a^A f(x + bi)\,dx + \int_{bi}^{Bi} f(x + A)\,dx =$$

$$\int_a^A f(x + Bi)\,dx + \int_{bi}^{Bi} f(x + a)\,dx,$$

der mit folgendem einerlei ist:

$$\int_a^A f(x + bi)\,dx + i\int_b^B f(A + xi)\,dx =$$

$$\int_a^A f(x + Bi)\,dx + i\int_b^B f(a + xi)\,dx, \qquad \text{(IV)}$$

wo a, b, A, B beliebige reelle Zatlen sind, und i die imaginäre Einheit ist. Specialisirt man diesen Zusammenhang, indem man entweder a = B = 0, oder b = A = 0 annimmt, so wird man jedesmal auf einen Zusammenhang von folgender Form geführt:

$$\int_0^a \left\{ f(x+bi) - f(x) \right\} dx = i\int_0^b \left\{ f(a+xi) - f(xi) \right\} dx, \qquad \text{(V)}$$

wo a und b beliebige reelle Zahlen sind, wovon wir im Folgenden noch ein Paar Anwendungen mittheilen.

8. Nehmen wir $f(x) = e^{\lambda x^2}$ an, wo e die bekannte Grundzahl der natürlichen Logarithmen, und λ eine reelle Constante ist.

Führt man diese Annahme in (V) ein, setzt λ positiv voraus und $b = \infty$, so gelangt man nach Sonderung der reellen von den imaginären Theilen auf folgende zwei Integralgleichungen:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x^2} \cos 2\lambda a x \, dx = e^{-\lambda a^2} \int_0^\infty e^{-\lambda x^2} dx,$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x^2} \sin 2\lambda a x \, dx = e^{-\lambda a^2} \int_0^a e^{\lambda x^2} dx,$$

wo λ reell und positiv, a lediglich als reell festzuhalten ist.

Bedenkt man die allgemein bekannte Integralbestimmung:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \qquad (a)$$

so zieht man aus der erstern vorangehender zwei Gleichungen, falls λ durch α und a durch $\frac{\beta}{2\alpha}$ ersetzt wird, folgende ebenfalls bekannte Integralbestimmung:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \cos \beta x \, dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \qquad (b)$$

die für alle reellen Werthe von β und für alle positiven reellen Werthe von α Bestand hat.

Halten wir ferner a als endliche reelle Zahl fest, so bietet die zweite obiger Gleichungen, wenn mit λ und a dieselben Abänderungen vorgenommen werden, folgende dar:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \sin \beta x \, dx = e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \int_0^{\frac{\beta}{2\alpha}} e^{\alpha x^2} dx;$$

entwickelt man $e^{\alpha x^2}$ in eine ohne Ende fortlaufende Reihe und integrirt innerhalb der angesetzten Integrationsgrenzen, so gelangt man sehr bald auf folgende Integralbestimmung:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \sin \beta x \, dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \left\{ \frac{\beta}{\sqrt{2\alpha}} + \frac{\left(\frac{\beta}{\sqrt{2\alpha}}\right)^3}{2.3} + \frac{\left(\frac{\beta}{\sqrt{2\alpha}}\right)^5}{2.4.5} + \frac{\left(\frac{\beta}{\sqrt{2\alpha}}\right)^7}{2.4.6.7} + \text{in inf.} \right\}, \qquad (c)$$

welche in Beziehung auf schnelle Convergenz viel brauchbarer, als die von mir im ersten Bande meiner Integralrechnung (pag. 343) aufgefundene Gleichung (10) ist.

9. Wird ferner die Annahme:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda x}}{\mu + x}$$

getroffen, wo λ und μ reelle, positiv angebbare Zahlen vorstellen, so

bietet das allgemeine Ergebniss (V), wenn einmal $a = \infty$, ein andermal $b = \infty$ erklärt wird, und wenn jedesmal die reellen von den imaginären Theilen gesondert werden, folgende zwei Systeme von Integralgleichungen dar:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^b \frac{\mu \sin \lambda x + x \cos \lambda x}{\mu^2 + x^2} dx &= \int_0^\infty \frac{b \sin b\lambda - (\mu + x) \cos b\lambda}{b^2 + (\mu + x)^2} e^{-\lambda x} dx \\ &\quad + \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}}{\mu + x} dx, \\ \int_0^b \frac{\mu \cos \lambda x - x \sin \lambda x}{\mu^2 + x^2} dx &= \int_0^\infty \frac{b \cos b\lambda + (\mu + x) \sin b\lambda}{b^2 + (\mu + x)^2} e^{-\lambda x} dx,\end{aligned}\right\} \text{(d)}$$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^a \frac{e^{-\lambda x}}{\mu + x} dx &= \int_0^\infty \frac{x \cos \lambda x + \mu \sin \lambda x}{\mu^2 + x^2} dx \\ &\quad - e^{-\lambda a} \int_0^\infty \frac{x \cos \lambda x + (\mu + a) \sin \lambda x}{(\mu + a)^2 + x^2} dx, \\ 0 &= \int_0^\infty \frac{x \sin \lambda x - \mu \cos \lambda x}{\mu^2 + x^2} dx \\ &\quad - e^{-\lambda a} \int_0^\infty \frac{x \sin \lambda x - (\mu + a) \cos \lambda x}{(\mu + a)^2 + x^2} dx,\end{aligned}\right\} \text{(e)}$$

Vorerst bemerken wir, dass diese zwei Systeme zusammenfallen, wenn im erstern $b = \infty$ und im letztern $a = \infty$ angenommen wird; sie bieten nämlich folgendes System dar:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x \cos \lambda x + \mu \sin \lambda x}{\mu^2 + x^2} dx &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}}{\mu + x} dx, \\ \int_0^\infty \frac{x \sin \lambda x - \mu \cos \lambda x}{\mu^2 + x^2} dx &= 0.\end{aligned}\right\} \text{(f)}$$

Diese nun sind für mich deswegen von Interesse, da sie für alle positiv angebbaren Werthe von λ und μ mit aller mathematischen Strenge bestehen, daher sie nach jeder Grösse für sich differenzirt werden dürfen; geschieht dieses nach λ und combinirt je ein gewonnenes Ergebniss bezüglich mit der Gleichheit, aus der solches gezogen worden; — so gelangt man auf:

$$\int_0^\infty \sin \lambda x \, dx = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}, \quad \int_0^\infty \cos \lambda x \, dx = 0, \qquad \text{(g)}$$

die, wie dem Leser meiner Schriften bekannt ist, von hohem Interesse für mich sind.

II.

Zur algebraischen Analysis.

VORWORT.

Während der letzten Jahre meiner Wirksamkeit am hiesigen obern Gymnasium theilte ich je im letzten Quartal des dritten oder letzten Schuljahres, gleichsam als Wiederholung, noch einmal die wichtigsten Reihen für die trigonometrischen, exponentiellen und logarithmischen Functionen mit, wobei ich mich nicht mehr, wie beim Unterrichte, der äusserst fruchtbaren und anregenden Methode der unbestimmten Coefficienten bediente, sondern mehr direkte, ohne über die Form je einer beabsichtigten Entwickelung von vorne herein zu verfügen, wie solches die folgenden Blätter der vorliegenden Mittheilung zeigen werden, verfuhr. Meine Absicht mit deren Veröffentlichung ist nicht den gewonnenen Stoff, der schon lang bekannt ist, als vielmehr die Form oder den Weg, durch den solcher erzielt worden, einer öffentlichen Beurtheilung und einer noch weiteren Vervollkommnung zu übergeben.

---

1. Aus den Fundamentaleigenschaften der aus der Geometrie entlehnten Begriffe von $\sin x$ und $\cos x$ gelangt man bald auf den Moivr'schen Satz, oder auf die Gleichheit:

$$(\cos x + i \sin x)^m = \cos mx + i \sin mx, \qquad (1)$$

die bei jeder reellen Verfügung über m und x Bestand hat, falls i die imaginäre Einheit vorstellt.

Entwickelt man das Binom linkerhand, nachdem man den Faktor $\cos x^m$ herausgehoben, nach aufsteigenden Potenzen von $\frac{\sin x}{\cos x} (= \operatorname{tang} x)$; so hat man, wenn m als eine allgemeine reelle Zahl auftritt, für alle Werthe von x, so numerisch gleich oder kleiner als $\frac{\pi}{4}$ sind, folgende zwei Gleichheiten:

$$\cos mx = \left\{ 1 - \binom{m}{2} \tang x^2 + \binom{m}{4} \tang x^4 - \binom{m}{6} \tang x^6 + \ldots \right\} \cos x^m,$$

$$\sin mx = \left\{ \binom{m}{1} \tang x - \binom{m}{3} \tang x^3 + \binom{m}{5} \tang x^5 - \ldots \right\} \cos x^m,$$

wo allgemein $\binom{m}{k}$ den Binomialcoefficienten von z^k in der Entwickelung von $(1+z)^m$ vorstellt.

Wenn in diesen Gleichheiten die allgemeine Grösse x in den Zustand des unendlichen Abnehmens versetzt wird, in welchem wir sie durch ω vorzustellen pflegen, so gehen sie in folgende über:

$$\cos m\omega = \left\{ 1 - \binom{m}{2}\omega^2 + \binom{m}{4}\omega^4 - \binom{m}{6}\omega^6 + \ldots \right\} \cos \omega^m,$$

$$\sin m\omega = \left\{ \binom{m}{1}\omega - \binom{m}{3}\omega^3 + \binom{m}{5}\omega^5 - \ldots \right\} \cos \omega^m;$$

sei ferner $m\omega = z$, wo m ohne Ende wachsend, und z jede reelle, nur nicht unendlich grosswerdende Zahl vorstellt, so hat man auch:

$$\cos z = \left\{ 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots \right\} \cos \omega^m,$$

$$\sin z = \left\{ z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \right\} \cos \omega^m.$$

Um endlich den Grenzwerth des Faktors $\cos \omega^m$ bei den getroffenen Feststellungen über ω und m zu erhalten, bedenke man, dass wenn z ohne Ende abnimmt, aus der zweiten dieser eben gewonnenen Gleichheiten folgende Grenzgleichung gewonnen wird:

$$\text{Lim.} \frac{\sin \omega}{\omega} = \text{Lim.} \cos \omega^m;$$

und da der Grenzausdruck linkerhand der positiven Einheit gleich ist, so ist es auch der rechterhand; — und man hat für alle nicht ins Unendliche wachsende Werthe von x folgende Gleichheiten:

$$\left.\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{in inf.,} \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2\ldots7} + \text{in inf.} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

2. Stellt man die durch $\cos x + i \sin x$ angedeutete Function von x durch f(x) dar, d. h. setzt man

$$f(x) = \cos x + i \sin x \quad (2)$$

fest, so stellt sich das in vorangehender Nr. unterlegte Moivr'sche Theorem folgendermassen dar:

$$f(x)^m = f(mx),$$

und da $mx = xm$ ist, hat man auch

$$f(x)^m = f(m)^x, \text{ woraus } f(x) = f(m)^{\frac{x}{m}}$$

gezogen wird. Der Ausdruck linkerhand dieser Gleichheit ist aber unabhängig von m, so muss es auch der rechterhand sein, d. h. es kann m beliebig ersetzt werden. Ersetzen wir diesem nach m durch — mi, wo i die imaginäre Einheit ist, so hat man:

$$f(x) = f(-mi)^{\frac{xi}{m}},$$

wo nach den Gleichheiten (1) vorangehender Nr.:

$$f(-mi) = 1 + m + \frac{m^2}{1.2} + \frac{m^3}{1.2.3} + \frac{m^4}{1.2.3.4} + \text{in inf.}$$

d. h. $f(-mi)$ ist eine reelle Function von m. Führt man eine neue Function von x, die durch $\varphi(x)$ vorgestellt sein mag, mittelst folgender Gleichheit ein:

$$\varphi(x) = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots, \quad (3)$$

so hat man folgenden Zusammenhang zwischen den durch f und φ angedeuteten Functionen

$$f(x) = \varphi(m)^{\frac{i}{m}x}.$$

Beachtet man abermals den Umstand, dass m völlig willkürlich sei, so hat man bei der Annahme $m = 1$:

$$f(x) = \varphi(1)^{xi}. \quad (4)$$

Aus (3) zieht man aber

$$\varphi(1) = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots = 2{,}7182818\ldots;$$

daher hat man, wenn diese so eben gewonnene irrationale Zahl durch e dargestellt wird, d. h. wenn man

$$e = 2{,}7182818\ldots \quad (5)$$

setzt, die Eingangs unterlegte Function $f(x)$ auch durch e^{xi} bestimmt erhalten; wodurch folgende neue Gleichheit gewonnen wird:

$$\cos x + i \sin x = e^{xi}, \quad (6)$$

deren Folgen dem Analysten wohl bekannt, und auf die beachtenswerthe Aussage führt, dass es die imaginäre Einheit ist, welche die reinen Zahlengrössen mit den Raumgrössen verbindet.

Geht endlich hier in (6) x in — ix über, so gelangt man auch auf:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2,3.4} + \ldots, \quad (7)$$

in welcher Gleichheit unter e die in (5) angedeutete Zahl zu verstehen ist.

3. Wird in (7) x durch bx ersetzt, wodurch:

$$e^{bx} = 1 + bx + b^2 \frac{x^2}{1.2} + b^3 \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

erhalten wird; so gelangen wir sehr bald auf die Entwickelungen der allgemeinen exponentiellen sowohl, wie der logarithmischen Function von x durch convergente ohne Ende fortlaufende Reihen.

Erklären wir e als die Grundzahl der sogenannten natürlichen Logarithmen, so hat man bei der Annahme:

$$e^b = a, \text{ auch } b = \log a,$$

und die vorhergehende Gleichheit geht über in:

$$a^x = 1 + x \log a + \frac{x^2}{1.2} (\log a)^2 + \frac{x^3}{1.2.3} (\log a)^3 + \ldots\ldots, \quad (8)$$

welche die allgemeine Exponentialfunction von x bei der Grundzahl, oder Basis, a durch eine nach aufsteigenden Potenzen von x ohne Ende fortlaufende Reihe darstellt.

Wenn in dieser Gleichheit x ohne Ende abnimmt und, wie schon oben geschah, alsdann durch ω dargestellt wird, so gelangt man zuletzt auf die Grenzgleichung:

$$\log a = \text{Lim.} \frac{a^\omega - 1}{\omega}.$$

Erklärt man a nur um eine echtgebrochene Zahl grösser wie 1, d. h. setzt man $a = 1 + c$, wo c positiv angebbar und kleiner wie 1 ist, dann hat man mit Zuziehung des binomischen Satzes:

$$a^\omega = 1 + \binom{\omega}{1} c + \binom{\omega}{2} c^2 + \binom{\omega}{3} c^3 + \text{in inf.},$$

und nunmehr stellt sich:

$$\log a = \text{Lim.} \left\{ c - \frac{1-\omega}{1.2} c^2 + \frac{(1-\omega)(2-\omega)}{1.2.3} c^3 - \ldots\ldots \right\}$$

heraus, wo das Grenzzeichen Lim. auf das immerwährende Abnehmen von ω Bezug hat.

Stellt man endlich diesen Grenzwerth her, ersetzt hierauf a durch $1 + c$ und zuletzt c durch x; so hat man für alle innerhalb 0 und 1 fallende Werthe von x die Gleichheit:

$$\log (1 + x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \text{in inf.} \quad (9)$$

Wird endlich noch in Gleichheit (8) $x = 1$ und hierauf a durch x ersetzt, so hat man folgende inverse zur eben aufgestellten Gleichheit:

$$x = 1 + \log x + \frac{(\log x)^2}{1.2} + \frac{(\log x)^3}{1.2.3} + \frac{(\log x)^4}{1.2.3.4} + \text{in inf.}, \quad (10)$$

die für alle positiv angebbaren Werthe von x brauchbar ist, oder identisch Bestand hat.

4. Mit Zuziehung desselben Moivr'schen Theorems (I), wie eines der ersten Sätze aus den höhern Gleichungen gelangt man auf folgende Gleichheiten:

$$x^{2p} - 1 = (x^2 - 1)(x^2 - 2x\cos a + 1)(x^2 - 2x\cos 2a + 1)\ldots$$
$$\ldots (x^2 - 2x\cos(p-1)a + 1), \quad (II)$$

$$x^{2p} + 1 = (x^2 - 2x\cos b + 1)(x^2 - 2x\cos 3b + 1)(x^2 - 2x\cos 5b + 1)\ldots$$
$$\ldots (x^2 - 2x\cos(2p-1)b + 1), \quad (III)$$

wo wir

$$a = \frac{\pi}{p} \text{ und } b = \frac{\pi}{2p} \qquad (\alpha)$$

gesetzt haben, in denen π die Verhältnisszahl eines Kreisumfanges zu seinem Durchmesser vorstellt.

Diese Gleichheiten können auch folgendermassen gestellt werden:

$$x^p - x^{-p} = (x - x^{-1})(x + x^{-1} - 2\cos a)(x + x^{-1} - 2\cos 2a)\ldots$$
$$\ldots (x + x^{-1} - 2\cos(p-1)a),$$

$$x^p + x^{-p} = (x + x^{-1} - 2\cos b)(x + x^{-1} - 2\cos 3b)(x + x^{-1} - 2\cos 5b\ldots$$
$$\ldots (x + x^{-1} - 2\cos(2p-1)b),$$

und wenn hier x durch e^{xi} ersetzt wird, erhält man mit Zuziehung der Gleichheit in (6) folgende zwei Gleichheiten:

$$\left.\begin{aligned} \sin px &= 2^{p-1}\sin x(\cos x - \cos a)(\cos x - \cos 2a)\ldots. \\ &\quad \ldots.(\cos x - \cos(p-1)a), \\ \cos px &= 2^{p-1}(\cos x - \cos b)(\cos x - \cos 3b)(\cos x - \cos 5b)\ldots \\ &\quad \ldots(\cos x - \cos(2p-1)b). \end{aligned}\right\} (11)$$

Bedenkt man, dass der Bruch $\frac{x^{2p}-1}{x^2-1}$ bei der Annahme $x = 1$, oder bequemer, bei der $x = 1 - \omega$, wo ω, wie schon mehrmals geschah, der Repräsentant einer reellen unendlich kleinwerdenden Zahl ist, sehr bald $= p$ erkannt wird, so dass bei dieser Verfügung über x die Gleichheiten in (II und III) folgende darbieten:

$$\left.\begin{aligned} p &= 2^{p-1}(1 - \cos a)(1 - \cos 2a)(1 - \cos 3a)\ldots. \\ &\quad \ldots.(1 - \cos(p-1)a), \\ 1 &= 2^{p-1}(1 - \cos b)(1 - \cos 3b)(1 - \cos 5b)\ldots \\ &\quad \ldots(1 - \cos(2p-1)b); \end{aligned}\right\} (12)$$

so können die Gleichheiten in (11) auch durch folgende ersetzt werden:

$$\left.\begin{aligned}\sin px &= p \sin x \cdot \frac{\cos x - \cos a}{1 - \cos a} \cdot \frac{\cos x - \cos 2a}{1 - \cos 2a} \cdots \frac{\cos x - \cos (p-1)a}{1 - \cos (p-1)a}, \\ \cos px &= \frac{\cos x - \cos b}{1 - \cos b} \cdot \frac{\cos x - \cos 3b}{1 - \cos 3b} \cdots \frac{\cos x - \cos (2p-1)b}{1 - \cos (2p-1)b},\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

wo a und b die in den Gleichungen (α) festgestellten Bedeutungen haben, und wo p irgend eine reelle, ganze, positive Zahl vorstellt.

5. Mittelst der eben gewonnenen Gleichheiten in (13) kann man die Functionen $\sin x$ und $\cos x$ auch durch ohne Ende fortlaufende Faktorenfolgen darstellen, was wir im Folgenden zeigen wollen.

Wird nämlich in besagten Gleichheiten (13) $x = \omega$ und $p = k$ gesetzt, wo ω eine ohne Ende abnehmende und k (zwar ganz) eine ohne Ende wachsende Zahlengrösse vorstellt, so dass $\sin x = \omega$ und, so lange r gegen p, oder nunmehr k, verschwindet, die Gleichungen

$$\frac{\cos x - \cos ra}{1 - \cos ra} = 1 - \frac{(k\omega)^2}{r^2\pi^2}, \quad \frac{\cos x + \cos ra}{1 + \cos ra} = 1$$

bestehen; hingegen wenn r diesen Zustand verlässt und in ein angebbares Verhältniss zu p, oder nunmehr k, tritt, jeder der Brüche linkerhand der Gleichheitszeichen der so eben aufgestellten zwei Gleichungen durch die Einheit ersetzt werden darf. Bedenkt man weiter die Gleichheit:

$$\frac{\cos x - \cos (p-r)a}{1 - \cos (p-r)a} = \frac{\cos x + \cos ra}{1 + \cos ra},$$

wie auch dass es ein gleiches Bewenden mit den Faktoren in (13) hat, die b statt a mitführen: so gehen besagte Gleichheiten (13), falls das Produkt $k\omega$ jeden, nur nicht ohne Ende wachsenden, Werth vorstellt, den wir durch x repräsentiren wollen, in folgende über:

$$\left.\begin{aligned}\sin x &= x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\cdots\cdots \\ \cos x &= \left(1 - 4 \cdot \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - 4 \cdot \frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\left(1 - 4 \cdot \frac{x^2}{(5\pi)^2}\right)\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Aus der ersten dieser Gleichheiten folgt bei der Annahme $x = \frac{\pi}{2}$ die folgende von Wallis herrührende Bestimmung:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots.}{1.3.3.5.5.7.7.8\ldots.}, \quad (15)$$

wo, von der Linken zur Rechten gezählt, gleichviel Faktoren im Zähler und Nenner in Anspruch zu nehmen sind.

6. Aus den Ergebnissen in (14) kann man ohne grossen Rechnungsaufwand zu den nach Potenzen von x geordneten Reihen gelangen, welche die Functionen:

$$\frac{1}{\sin x} \text{ und } \frac{1}{\cos x}, \text{ oder bezüglich cosec x und sec x}$$

darstellen.

Die erste Gleichheit in (14) kann folgendermassen gestellt werden:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{(r\pi)^2}\right)\cdots\cdots};$$

zerlegt man diesen Bruch in Partialbrüche, deren Nenner die linearen Faktoren des Gesammtnenners sind, so kann folgende Gleichheit gesetzt werden:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\alpha_1}{\pi - x} + \frac{\beta_1}{\pi + x} + \frac{\alpha_2}{2\pi - x} + \frac{\beta_2}{2\pi + x} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + \frac{\alpha_r}{r\pi - x} + \frac{\beta_r}{r\pi + x} + \cdots\cdots,$$

wo die Buchstaben α, α_1, α_2, ... β, β_1, β_2, ... constante oder von x unabhängige Grössen sind, die wir nun zu bestimmen haben.

Wir stellen diese sein sollende Gleichheit einfacher, wie folgt:

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{\alpha}{x} + \sum_{r=1}^{r=\infty} \alpha_r \cdot \frac{1}{r\pi - x} + \sum_{r=1}^{r=\infty} \beta_r \cdot \frac{1}{r\pi + x},$$

aus der sehr bald folgende gezogen wird:

$$1 = \alpha \cdot \frac{\sin x}{x} + \sum_{r=1}^{r=\infty} \alpha_r \cdot \frac{\sin x}{r\pi - x} + \sum_{r=1}^{r=\infty} \beta_r \cdot \frac{\sin x}{r\pi + x}.$$

Setzen wir hier $x = 0$, oder, bequemer für die Endbestimmung, $x = \omega$, so gelangen wir auf:

$$1 = \alpha \frac{\sin \omega}{\omega},$$

aus der, weil ω ohne Ende abnimmt, $\alpha = 1$ gefolgert wird.

Setzen wir ferner $x = r\pi$ oder, aus gleichem Grunde wie unmittelbar vorher, $x = r\pi - \omega$, so gelangen wir auf:

$$1 = \alpha_r \cdot \frac{\sin(r\pi - \omega)}{\omega} = (-1)^{r-1} \alpha_r \cdot \frac{\sin \omega}{\omega},$$

aus der $\alpha_r = (-1)^{r-1}$ für alle Werthe von $r = 1$ bis $r = \infty$ gefolgert wird.

Wenn wir endlich $x = -r\pi + \omega$ annehmen, so gelangen wir zuletzt, ebenfalls von $r = 1$ bis $r = \infty$, auf $\beta_r = (-1)^r$.

Wir haben also, dieses vorausgeschickt, die Gleichheit:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} + \frac{1}{3\pi - x} - \ldots .$$

$$\ldots . \frac{(-1)^{r-1}}{r\pi - x} + \frac{(-1)^r}{r\pi + x} + \text{in inf.} \qquad (16)$$

Ersetzen wir hier x durch $\frac{\pi}{2} - x$, so haben wir auch:

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + x} + \ldots . \qquad (17)$$

Bedenken wir wieder, dass $\frac{1}{\sin x}$ beim Umsetzen von x in $-x$ auf das gleiche, nur dem Zeichen nach entgegengesetzte Resultat führen muss, dass hingegen $\frac{1}{\cos x}$ bei derselben Umsetzung von x in $-x$ durchweg ungeändert zu verbleiben hat: so ergibt sich, dass man in (16) die Gliederpaare zusammen zu fassen hat, so an der zweiten und dritten, vierten und fünften u. s. w. Stelle stehen; hingegen sind in (17) jene Gliederpaare, so an der ersten und zweiten, dritten und vierten u. s. w. Stelle stehen, zusammen zu fassen.

Auf diesem Wege gewinnen wir folgende zwei Gleichheiten:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{(2\pi)^2 - x^2} + \frac{2x}{(3\pi)^2 - x^2} - \text{in inf.},$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2} - \frac{3\pi}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \frac{5\pi}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 - x^2} - \text{in inf.},$$

die kürzer in folgender Weise dargestellt werden können:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{(r\pi)^2 - x^2}, \qquad (18)$$

$$\frac{1}{\cos x} = \pi \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^{r-1} \cdot \frac{2r-1}{\left(\frac{2r-1}{2}\pi\right)^2 - x^2}, \qquad (19)$$

welche Resultate den oben erwähnten Anforderungen beim Umsetzen von x in $-x$ vollkommen nachkommen.

7. Aus diesen Ergebnissen in (18 und 19) werden wir nun sehr bald auf die Reihen geführt werden, deren Eingangs vorangehender Nr. Erwähnung geschah.

Für alle Werthe von x, die numerisch kleiner als $r\pi$ sind, hat man:

$$\frac{(-1)^{r-1}}{(r\pi)^2-x^2} = \frac{(-1)^{r-1}}{r^2\pi^2}\left\{1+\left(\frac{x}{r\pi}\right)^2+\left(\frac{x}{r\pi}\right)^4+\left(\frac{x}{r\pi}\right)^6+\text{in inf.}\right\},$$

und eben so besteht für alle numerischen Werthe von x, so kleiner als $\frac{2r-1}{2}\pi$ sind, folgende Gleichheit:

$$\frac{(-1)^{r-1}}{\left(\frac{2r-1}{2}\pi\right)^2-x^2} =$$

$$(-1)^{r-1}\cdot\frac{4}{(2r-1)^2\pi^2}\left\{1+\left(\frac{2x}{(2r-1)\pi}\right)^2+\left(\frac{2x}{(2r-1)\pi}\right)^4+\text{in inf.}\right\}$$

Diesem nach gehen die Gleichheiten (18 und 19) nunmehr in folgende über:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x}+\frac{2x}{\pi^2}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r^2}+\frac{2x^3}{\pi^4}+\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r^4}$$

$$+\frac{2x^5}{\pi^6}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r^6}+\text{in inf.},$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{2^2}{\pi}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{2r-1}+\frac{2^4}{\pi^3}x^2\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)^3}$$

$$+\frac{2^6}{\pi^5}x^4\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)^5}+\text{in inf.},$$

von denen, weil r auch den Werth 1 hat, erstere für sämmtliche Werthe von x, so numerisch kleiner denn π, und letztere für sämmtliche Werthe von x Bestand hat, so numerisch kleiner denn $\frac{\pi}{2}$ sind.

Bedenkt man weiter folgende leicht zu verificirende Gleichung:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r^{2m}} = \left(1-\frac{1}{2^{2m-1}}\right)\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{r^{2m}},$$

wie den Umstand, dass $\frac{1}{\cos x}$ bei $x = 0$ in die positive Einheit übergeht, wodurch die zweite obiger Gleichheiten auf folgende Reihe von Leibniz führt:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{in inf.}, \qquad (20)$$

so hat man folgende zwei Auflösungen:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{2\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\pi^2} x \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r^2} + \frac{2\left(1-\frac{1}{2^3}\right)}{\pi^4} x^3 \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r^4}$$
$$+ \frac{2\left(1-\frac{1}{2^5}\right)}{\pi^6} x^5 \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r^6} + \text{in inf.},$$

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{2^4}{\pi^3} x^2 \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)^3} + \frac{2^6}{\pi^5} x^4 \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)^5}$$
$$+ \frac{2^8}{\pi^7} x^6 \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)^7} + \text{in inf.}$$

Führen wir folgende abkürzenden Bezeichnungen ein:

$$B_m = 1.2.3.\ldots.2m \cdot \frac{2}{(2\pi)^{2m}} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r^{2m}}, \qquad (\beta)$$

$$E_m = 1.2.3.\ldots.2m \cdot \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{2m+1}} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)^{2m+1}}, \qquad (\gamma)$$

von denen erstere, oder B_m, die Bernoullischen und letztere, oder E_m, die Euler'schen Zahlen vorstellen, wenn für m nach und nach 1, 2, 3,.... m.... gesetzt wird; so gehen die oben gewonnenen Entwickelungen für $\frac{1}{\sin x}$ und $\frac{1}{\cos x}$ in folgende über:

$$\frac{1}{\sin x} = \text{cosec } x =$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2(2-1)}{1.2} B_1 x + \frac{2(2^3-1)}{1.2.3.4} B_2 x^3 + \frac{2(2^5-1)}{1.2.3.4.5.6} B_3 x^5 + \text{in inf.}, \qquad (21)$$

$$\frac{1}{\cos x} = \sec. x =$$

$$1 + \frac{1}{1.2} E_1 x^2 + \frac{1}{1.2.3.4} E_2 x^4 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6} E_3 x^6 + \text{in inf.}, \quad (22)$$

wobei in jener $x < \pi$ und in dieser $x < \frac{\pi}{2}$ sein muss.

8. Zur numerischen Bestimmung der Bernoullischen Zahlen B_1, B_2, B_3, ..., wie der Euler'schen E_1, E_2, E_3, ... theile ich hier noch einige Recursionsgleichungen mit.

Multiplicirt man Gleichheit (21) mit:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - ....,$$

die für alle nur nicht unendlich grosswerdenden Werthe von x, sonach auch für $x < \pi$ Bestand hat, wodurch nach vollbrachter Multiplikation linkerhand vom Gleichheitszeichen die Einheit, rechterhand aber eine nach geraden Potenzen von x aufsteigend geordnete, ohne Ende fortlaufende Reihe gewonnen wird; — so gelangt man, wenn nunmehr nach dem bekannten Principe der unbestimmten Coefficienten verfahren wird, unmittelbar auf folgende Recursionen:

$$\frac{2(2-1)}{1.2} B_1 - \frac{1}{1.2.3} = 0,$$

$$\frac{2(2^3-1)}{1.2.3.4} B_2 - \frac{2(2-1)}{1.2.1.2.3} B_1 + \frac{1}{1.2.3.4.5} = 0,$$

$$\frac{2(2^5-1)}{1.2.3.4.5.6} B_3 - \frac{2(2^3-1)}{1.2.3.4.1.2.3} B_2 + \frac{2(2-1)}{1.2.1.2.3.4.5} B_1 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} = 0,$$

$$\frac{2(2^7-1)}{1.2....8} B_4 - \frac{2(2^5-1)}{1.2...6.1.2.3} B_3 + \frac{2(2^3-1)}{1.2.3.4.1.2..5} B_2 - \frac{2(2-1)}{1.2.1.2....7} B_1 + \frac{1}{1.2.3...9} = 0$$

u. s. w.

Aus diesen und den noch folgenden, leicht fortzusetzenden Recursionen findet man:

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66},$$

$$B_6 = \frac{691}{2730}, \quad B_7 = \frac{7}{6} \text{ u. s. w.},$$

wobei ich noch bemerke, dass es bequemere Recursionen denn die hier mitgetheilten gibt, auf welche ich aber gegenwärtig nicht eintrete.

Behandelt man ganz ähnlich die Gleichheit (22), so bieten sich folgende Recursionen zur Bestimmung der Euler'schen Zahlen dar:

$$E_1 - 1 = 0,$$
$$E_2 - \binom{4}{2} E_1 + \binom{4}{4} = 0,$$
$$E_3 - \binom{6}{2} E_2 + \binom{6}{4} E_1 - \binom{6}{6} = 0,$$
$$E_4 - \binom{8}{2} E_3 + \binom{8}{4} E_2 - \binom{8}{6} E_1 + \binom{8}{8} = 0$$

u. s. w., die sehr leicht fortzusetzen, und uns zugleich belehren dass die Euler'schen Zahlen durchweg ganze sind. Man findet sehr bald:

$E_1 = 1$, $E_2 = 5$, $E_3 = 61$, $E_4 = 1385$, $E_5 = 50521$ u. s. w.,

welche Zahlen ungeachtet ihres augenfälligen Wachsens gleichwohl zur Ermittelung von $\frac{1}{\cos x}$ nach Gleichung (22) schnell führen, wenn nur $x < \frac{\pi}{2}$ verbleibt.

Auch auf eine nähere Discussion dieser Zahlen trete ich gegenwärtig nicht ein.

9. Aehnliche Entwickelungen für die Functionen tang x und cotang x zu gewinnen, wenden wir uns ebenfalls den Gleichheiten in (14) zu, und stellen solche wie folgt:

$$\log \sin x = \log x + \sum_{r=1}^{r=\infty} \left\{ \log\left(1 + \frac{x}{r\pi}\right) + \log\left(1 - \frac{x}{r\pi}\right) \right\},$$

$$\log \cos x = \sum_{r=1}^{r=\infty} \left\{ \log\left(1 + \frac{2x}{(2r-1)\pi}\right) + \log\left(1 - \frac{2x}{(2r-1)\pi}\right) \right\}.$$

Wird in diesen Gleichheiten x durch $x + \omega$ ersetzt, so erhält man durch Subtraction bezüglich folgende zwei Gleichheiten:

$$\log \frac{\sin(x+\omega)}{\sin x} =$$

$$\log\left(1 + \frac{\omega}{x}\right) + \sum_{r=1}^{r=\infty} \left\{ \log\left(1 + \frac{\omega}{r\pi + x}\right) + \log\left(1 - \frac{\omega}{r\pi - x}\right) \right\},$$

$$\log \frac{\cos(x+\omega}{\cos x} =$$

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \left\{ \log\left(1 + \frac{\omega}{\frac{2r-1}{2}\pi + x}\right) + \log\left(1 - \frac{\omega}{\frac{2r-1}{2}\pi - x}\right) \right\}.$$

Wird, wie bis anher beständig geschah, ω als unendlich kleinwerdende Zahlengrösse behandelt, und nimmt beiderseits die Grenzen, nachdem vorerst überall durch ω dividirt worden ist, — so gelangt man mit Zuziehung der Gleichheit (9) zunächst auf:

$$\text{cotang } x = \frac{1}{x} + \sum_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1}{r\pi + x} - \frac{1}{r\pi - x} \right),$$

$$-\text{ tang } x = \sum_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1}{\frac{2r-1}{2}\pi + x} - \frac{1}{\frac{2r-1}{2}\pi - x} \right),$$

die sehr bald in folgende übergehen:

$$\text{cotang } x = \frac{1}{x} - \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{2x}{(r\pi)^2 - x^2},$$

$$\text{tang } x = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{2x}{\left(\frac{2r-1}{2}\pi\right)^2 - x^2}.$$

Bedenkt man, dass für $x < r\pi$ folgende Gleichung:

$$\frac{2x}{(r\pi)^2 - x^2} = \frac{2x}{(r\pi)^2} \left\{ 1 + \frac{x^2}{(r\pi)^2} + \frac{x^4}{(r\pi)^4} + \frac{x^6}{(r\pi)^6} + \cdots \right\}$$

identisch besteht, wie ferner für $x < \frac{2r-1}{2}\pi$ die folgende:

$$\frac{2x}{\left(\frac{2r-1}{2}\pi\right)^2 - x^2} = \frac{8x}{(2r-1)^2\pi^2} \left\{ 1 + \frac{2^2x^2}{(2r-1)^2\pi^2} + \frac{2^4x^4}{(2r-1)^4\pi^4} + \cdots \right\}$$

ebenfalls identisch Bestand hat; wird dann endlich folgende leicht zu verificirende Gleichung:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{(2r-1)^{2n}} = \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r^{2n}}$$

beachtet: so stellen sich die hier angekündigten Entwickelungen folgendermassen dar:

$$\text{cotang } x =$$

$$\frac{1}{x} - \frac{2^2}{1.2} B_1 x - \frac{2^4}{1.2.3.4} B_2 x^3 - \frac{2^6}{1....6} B_3 x^5 - .... \qquad (23)$$

$$\text{tang } x =$$

$$\frac{2^2(2^2-1)}{1.2} B_1 x + \frac{2^4(2^4-1)}{1.2.3.4} B_2 x^3 + \frac{2^6(2^6-1)}{1....6} B_3 x^5 + ... \qquad (24)$$

wo erstere für alle Zahlenwerthe von x die kleiner als π, und letztere für alle Zahlenwerthe von x die kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind, identisch besteht.

10. Mit Hilfe der oben aufgestellten Gleichheit in (23) ist die Summe einer beliebigen, aufeinander folgenden Gliederzahl der rten Potenzen der natürlichen ganzen Zahlen zu gewinnen möglich, wozu wir im Folgenden schreiten.

Es ist

$$\text{cotang } x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{e^{xi} - e^{-xi}} i =$$

$$\frac{1}{x} - \frac{2^2}{1.2} B_1 x - \frac{2^4}{1.2.3.4} B_2 x^3 - \frac{2^6}{1.2.3.4.5.6} B_3 x^5 - ....,$$

aus der, wenn x durch xi ersetzt wird, folgende hervorgeht:

$$\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} =$$

$$\frac{1}{x} + 2^2 B_1 \frac{x}{1.2} - 2^4 B_2 \frac{x^3}{1.2.3.4} + 2^6 B_3 \frac{x^5}{1...6} - 2^8 B_4 \frac{x^7}{1....8} + ...,$$

und wenn hier noch x durch $\frac{x}{2}$ ersetzt wird, erhält man:

$$1 + \frac{2}{e^x - 1} = \frac{2}{x} + 2B_1 \frac{x}{1.2} - 2B_2 \frac{x^3}{1.2.3.4} + 2B_3 \frac{x^5}{1....6} - ....,$$

oder endlich folgende:

$$\frac{x}{e^x - 1} =$$

$$1 - \frac{1}{2} x + B_1 \frac{x^2}{1.2} - B_2 \frac{x^4}{1.2.3.4} + B_3 \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} - ...., \qquad (25)$$

die, wegen des obigen Umsetzens von x in $\frac{x}{2}$, für alle Werthe von x identisch besteht, die numerisch kleiner als 2π sind.

Eine einfache Summation bietet folgende Gleichheit dar:

$$1+e^x+e^{2x}+e^{3x}+\ldots e^{(m-1)x}=\frac{e^{mx}-1}{e^x-1}=\frac{e^{mx}-1}{x}\cdot\frac{x}{e^x-1};$$

ferner ist:

$$\frac{e^{mx}-1}{x}=m+\frac{m^2}{1.2}x+\frac{m^3}{1.2.3}x^2+\frac{m^4}{1.2.3.4}x^3+\ldots\ldots$$

Multiplicirt man diese ohne Ende fortlaufende, für alle noch endlichen Werthe von x convergente Reihe mit der vorigen in (25) aufgestellten Reihe und ordnet alles nach aufsteigenden Potenzen von x; so wird die Produktenreihe für alle Zahlenwerthe von x, so kleiner als 2π sind, noch immer eine corvengente Reihe sein, in welcher der Coefficient von x^r folgendermassen aussehen wird:

$$\frac{1}{1.2.3\ldots r}\left\{\frac{m^{r+1}}{r+1}-\frac{1}{2}m^r+\frac{1}{2}\binom{r}{1}B_1m^{r-1}-\frac{1}{4}\binom{r}{3}B_2m^{r-3}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{6}\binom{r}{5}B_3m^{r-5}-\frac{1}{8}\binom{r}{7}B_4m^{r-7}+\ldots\right\},$$

wo die endliche Reihe innerhalb der Klammern mit m oder m^2 abbricht, je nachdem die ganze positive Zahl r gerade oder ungerade ist.

Wird nun die oben aufgestellte Progression:

$$1+e^x+e^{2x}+e^{3x}+\ldots e^{(m-1)x}$$

ebenfalls, gliedweise, nach aufsteigenden Potenzen von x entwickelt, wodurch eine für alle nicht unendlich grosswerdende Werthe von x convergente Reihe gewonnen wird, in der der Coefficient von x^r folgende Form hat:

$$\frac{1}{1.2.3\ldots r}\left\{1^r+2^r+3^r+4^r+\ldots.(m-1)^r\right\};$$

so ergibt sich nach dem Principe der gleichnamigen Coefficienten einander gleichen und convergenten Reihen die am Eingange angekündigte Bestimmungsgleichung, nämlich:

$$1^r+2^r+3^r+4^r+\ldots.(m-1)^r=$$
$$\frac{m^{r+1}}{r+1}-\frac{1}{2}m^r+\frac{1}{2}\binom{r}{1}B_1m^{r-1}-\frac{1}{4}\binom{r}{3}B_2m^{r-3}+\frac{1}{6}\binom{r}{5}B_3m^{r-5}-\ldots, \quad (26)$$

wo die Gliederreihe rechterhand mit dem Gliede m oder m^2 schliesst, je nachdem die positive, ganze Zahl r gerade oder ungerade ist.

11. Stellen wir in dem so eben gewonnenen Resultate m durch x und r durch m vor, wodurch wir:

$$1^m+2^m+3^m+\ldots\ldots(x-1)^m=B(x) \qquad (A)$$

haben, falls zur Vereinfachung:

$$B(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2}x^m + \frac{1}{2}\binom{m}{1}B_1 x^{m-1} - \frac{1}{4}\binom{m}{3}B_2 x^{m-3} + \ldots \quad (B)$$

gesetzt wird, so nenne ich diese eben eingeführte Function von x, oder B(x), nach ihrem ersten Autor, der sie Behufs Summation der Reihe in (A) aufstellte, die Jakob Bernoullische (oder auch einfach die Bernoullische) Function von x. Die hier auftretenden Buchstaben B_1, B_2, B_3.... sind die nach demselben Autor benannten Bernoullischen Zahlen, von denen wir im Vorausgehenden schon einigen Gebrauch machten.

Für ganze und positive Werthe von x stellt die Bernoullische Function B(x), wie aus (A) entnommen wird, die Summe der mten Potenzen aller ganzen Zahlen von 1 bis und mit x — 1 dar; für andere Werthe von x kann von dieser Function in vielen Zweigen der Analysis Nutzen gezogen werden, worüber Näheres in einer von mir im Jahre 1848 veröffentlichten Schrift: „Die Jakob Bernoullische Function", wie später in einer eignen, im 42. Bande des Crell'schen Journals veröffentlichten Abhandlung nachgesehen werden kann. Ganz in jüngster Zeit theilte auch Prof. Schlömilch eine Anwendung dieser Function mit, oder zeigte vielmehr nach, dass Prof. Malmsten in Upsala schon im 35. Bande des Crell'schen Journals von dieser Function eine geistreiche Anwendung veröffentlichte. Auch ich habe mich mit dem gleichen Gegenstande, mit dem sich meine hochgeehrten, eben erwähnten Herrn Collegen befassten, vor etwa 2—3 Jahren beschäftiget, und meine hiebei gewonnenen Ergebnisse an die Redaktion des Crell'schen Journals zur Veröffentlichung übermacht. Diese Einsendung, die ich gegenwärtig vor mir habe*), die das Datum „October 1855" trägt, enthält auch eine neue Anwendung der Bernoullischen Zahlen, welche ich ganz, wie sie im Crell'schen Journal zu erscheinen bestimmt war, in der nächstfolgenden Mittheilung des vorliegendon Heftes veröffentlichen werde. Gegenwärtig, oder in der vorliegenden Mittheilung, wo ich, wie im Vorwort angedeutet ward, einen mehr elementaren Standpunkt einzunehmen mich angewiesen sehe, will ich nur noch die fundamentalen Eigenthümlichkeiten der Bernoullischen Function B(x) vorführen, wozu ich die folgende Schlussnummer bestimme.

12. Die Gleichung (A) vorangehender Nr., welche zugleich mit

*) Die Verlagshandlung des Journals schickte mir solche nach dem Tode Crell's ohne irgend eine Anzeige einfach zurück.

(B) für alle ganze und positive Werthe von x Bestand hat, bietet beim Umsetzen von x in $x + 1$, und nachheriger Verbindung dieses Ergebnisses mit dem unterlegten durch Subtraktion die Gleichung dar:

$$B(x + 1) - B(x) = x^m. \qquad (C)$$

Die Definitionsgleichung (B) der Bernoullischen Function wird dieser eben gewonnenen, aus (A) gezogenen Gleichung ebenfalls identisch genügen, wenn x eine ganze positive Zahl ist; dass sie ihr aber auch für jedes x identisch genügt, d. h. dass bei Unterlegung der Definitionsgleichung (B) die eben aufgestellte in (C) eine Gleichheit sei, kann folgendermassen nachgewiesen werden.

Fassen wir den Ausdruck rechterhand aus (B) ins Auge, und bedenken, erstens, dass derselbe nur eine endliche Anzahl von Gliedern implicirt oder keine ohne Ende fortlaufende Reihe vorstellt, wie dann, zweitens, dass die in demselben vorkommende Grösse m eine positive, ganze Zahl ist; — so wird, wenn in demselben x durch $x + 1$ ersetzt, hierauf jedes Glied mittelst des binomischen Satzes nach Potenzen vor x entwickelt, und die gleichnamigen Glieder dann zusammen gefasst werden, — so wird, sage ich, das so gewonnene Ergebniss, vermöge (C) nur um das Glied x^m jenes, das unterlegt worden war, nämlich B (x), übertreffen. Da aber dieser ganze Rechnungsakt der so eben mitgetheilt ward, von je dem besondern Werth von x unberührt bleibt; so wird die Form des Ergebnisses, wenn für einen besondern Werthform von x erkannt, auch bei jeder andern Verfügung über x dieselbe bleiben. Nun stellt Gleichung (C) die Form dieses Ergebnisses für ganze positive Werthe von x dar; daher verbleibt diese Form, wenn x irgend einen Zahlenwerth bedeutet, w. z. B. w.

Eine zweite Eigenthümlichkeit der nach (B) definirten Bernoullischen Function wird gewonnen, wenn in besagter Definitionsgleichung x durch — x ersetzt wird, wo man dann auf folgende Gleichheit geführt wird:

$$B(x) + (-1)^m B(-x) = -x^m, \qquad (D)$$

die, gleichwie (C), für alle denkbare Werthe von x Bestand hat.

Diese beiden durch (C und D) ausgedrückten Eigenthümlichkeiten der in (B) definirten Bernoullischen Function B (x) bilden die Grundlage zu vielen beachtenswerthen Ergebnissen, auf die gegenwärtig nicht eingetreten werden kann.

III.

Neue Anwendungen der Jakob Bernoullischen Zahlen, wie der nach demselben Autor benannten Function.

VORWORT.

Die Stellung der Bernoullischen Zahlen in der gesammten Analysis ist eine allzu umfangreiche, aber auch allzu bekannte; diese sind derart Gemeingut der Analysten, dass eine nähere Angabe ihrer Litteratur für Leser der vorliegenden Mittheilungen übergangen werden kann. Minder bekannt, weil jüngern Datums, ist die Stellung, welche die von mir benannte „Jakob Bernoullische Function" in der Analysis gegenwärtig einnimmt. Ich habe nämlich jenen algebraisch rationalen Ausdruck im Auge, der die Summe von :

$$1^m + 2^m + 3^m + \ldots . (x-1)^m,$$

für jeden ganzen und positiv reellen Werth von x (nach Jacob Bernoulli) abhängig von x oder als Function von x darstellt, welche Function bei der ganzen Allgemeinheit des Argumentes x, gegenwärtig schon auf manches beachtenswerthe Resultat geführt, und über deren Litteratur ich mich in der vorletzten Nr. der unmittelbar vorhergehenden Mittheilung erschöpfend ausgesprochen habe.

Ich beabsichtige nun mit der vorliegenden Doppelmittheilung sowohl den Kreis der Anwendungen besagter Function zu erweitern, so wie auch der immensen Kette von Anwendungen der Bernoullischen Zahlen ein neues, und wie ich glaube, nicht uninteressantes Glied, als Anwendung noch anzufügen: diese im nächstfolgenden ersten Abschnitte (A), und jene in dem darauf folgenden (B). — Trotz der nahen Verwandtschaft, so die Bernoullischen Zahlen wie die Bernoullische Function gegenseitig eingehen, habe ich diese Sonderung gleichwohl vorgenommen, indem die in (A und B) mitzutheilenden Anwendungen einander ganz fremd, oder in keinerlei wissenschaftlichem Zusammenhang sind.

A.

Ueber die Form der linearen Differenzialgleichung zweier Variabeln nter Ordnung, bei der eine particuläre Integralauflösung zugleich den integrirenden Faktor derselben, der lediglich Function der absoluten Variabeln ist, vorstellt.

1. Jeder linearen Differenzialgleichung zwischen den Variabeln x und y der Form:

$$Xy_n + X^{(1)}y_{n-1} + X^{(2)}y_{n-2} + \ldots . X^{(n-1)}y_1 + X^{(n)}y = 0, \qquad (1)$$

die der n ten Ordnung ist, wo nämlich y_n den n ten Differenzialquotienten von y nach x vorstellt, und wo X, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ ... Functionen lediglich der absoluten Variabeln x sind, entspricht immer ein integrirender Faktor der Function lediglich von x ist. Wird derselbe durch M vorgestellt, so hat solcher einer analogen Differenzialgleichung der gleichen Ordnung zu genügen, die folgender Form ist (Jr. Nr. 562*):

$$AM_n + A^{(1)}M_{n-1} + A^{(2)}M_{n-2} + \ldots A^{(n-1)}M_1 + A^{(n)}M = 0, \qquad (2)$$

wo, wie in (1), unter M_n der n te Differenzialquotient von M nach x zu verstehen ist, und wo die Coefficienten A, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ . . . durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$\left.\begin{aligned}
A &= \tbinom{n}{n}X = X,\\
A^{(1)} &= \tbinom{n}{n-1}X_1 - \tbinom{n-1}{n-1}X^{(1)},\\
A^{(2)} &= \tbinom{n}{n-2}X_2 - \tbinom{n-1}{n-2}X_1^{(1)} + \tbinom{n-2}{n-2}X^{(2)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A^{(k)} &= \tbinom{n}{n-k}X_k - \tbinom{n-1}{n-k}X_{k-1}^{(1)} + \tbinom{n-2}{n-k}X_{k-2}^{(2)} - \ldots (-1)^k\tbinom{n-k}{n-k}X^{(k)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A^{(n)} &= X_n - X_{n-1}^{(1)} + X_{n-2}^{(2)} - \ldots (-1)^{n-1}X_1^{(n-1)} + (-1)^n X^{(n)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

In diesen Gleichungen deutet ein einer Function unten mehr zur Rechten beigesetzter Zahlenzeiger, gleichwie in den vorausgehenden Gleichungen, den gleichvielten Differenzialquotienten der betreffenden Function nach x an; ferner deutet ein Symbol, wie etwa $\binom{n}{k}$, den Coefficienten von z^k in der Entwickelung von $(1+z)^n$ nach Potenzen von z an.

Die hier aufgestellten linearen Differenzialgleichungen (1 und 2) gehen ein Reciprocitätsverhältniss (Jr. Nr. 563) in der Weise ein:

---

*) Ueberall, wo ich mein Werk über Integralrechnung citire, werde ich solches, wie hier geschah, andeuten.

dass jede Bestimmung für M aus (2) einen integrirenden Faktor zu (1), wie umgekehrt: jede Bestimmung für y aus (1) einen integrirenden Faktor zu (2) abgiebt. — Dieses vorausgesetzt, haben wir nach der Ueberschrift des vorliegenden Abschnittes die Bedingungen anzugeben, bei welchen (1) und (2) einerlei Bestimmungen, respective für y und M darbieten, d. h., weil vermöge der ersten Gleichung in (3) bereits $A = X$ ist, bei welchen man allgemein:

$$A^{(k)} = X^{(k)}, \tag{4}$$

für alle ganze Werthe von $k = 1$ bis $k = n$ haben wird.

2. Bei der Lösung dieser so eben aufgestellten Gleichung werden wir auf die Bernoullischen Zahlen geführt, die jene gegenseitige Abhängigkeiten der durch $X, X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)} \ldots$ vorgestellten Functionen von x vermitteln, bei denen eine particuläre Integralauflösung der betreffenden linearen Differenzialgleichung (1) auch einen integrirenden Faktor derselben, wie umgekehrt, vorstellt.

Wir legen zu diesem Zwecke die Gleichungen in (3) zu Grunde und entnehmen zunächst aus der ersteren, dass für den von uns beabsichtigten Zweck die durch X dargestellte Funktion von x ganz willkürlich, oder an keinerlei Bedingung gebunden sei.

Nach der zweiten Gleichung in (3) hat man, damit $A^{(1)} = X^{(1)}$ werde, folgender Gleichung:

$$X^{(1)} = \binom{n}{n-1} X_1 - \binom{n-1}{n-1} X^{(1)}$$

zu genügen, die beachtend die Bedeutung der Binomialcoefficienten in folgende übergeht:

$$X^{(1)} = \frac{1}{2}\binom{n}{1} X_1. \tag{5}$$

Die dritte Gleichung in (3) führt bei der Annahme $A^{(2)} = X^{(2)}$ auf:

$$0 = \binom{n}{2} X_2 - (n-1) X_1^{(1)},$$

die nach Unterdrückung des gemeinsamen Faktors (n—1) in folgende übergeht:

$$0 = \frac{1}{2}\binom{n}{1} X_2 - X_1^{(1)};$$

diese stellt aber nichts anderes als das Differenziationsergebniss nach x der nunmehr als identisch bestehend anzunehmenden Gleichung (5) vor; daher wir zum Schlusse uns berechtiget sehen: dass die durch $X^{(2)}$ vorgestellte Function von x, gleichwie jene durch X vorgestellte, an keinerlei Bedingung gebunden, d. h. ganz willkürlich sei.

Die vierte der Gleichungen in (3) geht bei der Annahme $A^{(3)} = X^{(3)}$ zunächst über in:

$$X^{(3)} = \binom{n}{3} X_3 - \binom{n-1}{2} X_2^{(1)} + \binom{n-2}{1} X_1^{(2)} - X^{(3)},$$

welche, das Ergebniss in (5) beachtend, das $X_2^{(1)} = \frac{1}{2}\binom{n}{1} X_3$ darbietet, auf folgende Bestimmungsgleichung führt:

$$X^{(3)} = -\frac{1}{4}\binom{n}{3} X_3 + \frac{1}{2}\binom{n-2}{1} X_1^{(2)}. \qquad (6)$$

Die fünfte der Gleichungen in (3) führt bei der Annahme $A^{(4)} = X^{(4)}$ auf:

$$0 = \binom{n}{4} X_4 - \binom{n-1}{3} X_3^{(1)} + \binom{n-2}{2} X_2^{(2)} - \binom{n-1}{1} X_1^{(3)};$$

und da diese, wenn $X_3^{(1)}$ und $X_1^{(3)}$ den Gleichungen (5 und 6) gemäss ersetzt werden, identisch realisirt wird: so gelangen wir, ähnlich wie bei Unterlegung der dritten Gleichung in (3), zum Schlusse: dass auch $X^{(4)}$ willkürlich, oder jede Function von x vorstellen darf.

Die sechste Gleichung in (3) führt bei der Annahme $A^{(5)} = X^{(5)}$ zunächst auf:

$$X^{(5)} = \binom{n}{5} X_5 - \binom{n-1}{4} X_4^{(1)} + \binom{n-2}{3} X_3^{(2)} - \binom{n-3}{2} X_2^{(3)} + \binom{n-4}{1} X_1^{(4)} - X^{(5)},$$

aus der, mit Zuziehung der gewonnenen Bestimmungen für $X^{(1)}$ und $X^{(3)}$, nach einigen unbedeutenden Reductionen, auf folgende neue Bestimmung gelangt wird:

$$X^{(5)} = \frac{1}{2}\binom{n}{5} X_5 - \frac{1}{4}\binom{n-2}{3} X_3^{(2)} + \frac{1}{2}\binom{n-4}{1} X_1^{(4)}. \qquad (7)$$

Wird in der bis jetzt befolgten Weise mit den Gleichungen in (3) fortgefahren; so erkennt man zunächst, dass $X^{(6)}$ willkürlich oder jede Function von x vorstellen darf, sowie auch folgende Bestimmung für $X^{(7)}$:

$$X^{(7)} = -\frac{17}{8}\binom{n}{7} X_7 + \frac{1}{2}\binom{n-3}{5} X_5^{(2)} - \frac{1}{4}\binom{n-4}{3} X_3^{(4)} + \frac{1}{2}\binom{n-6}{1} X_1^{(6)}. \qquad (8)$$

Weiter erkennt man, dass $X^{(8)}$ völlig willkürlich sei, für $X^{(9)}$ hingegen folgende Bestimmung:

$$X^{(9)} = \frac{31}{2}\binom{n}{9} X_9 - \frac{17}{8}\binom{n-2}{7} X_7^{(2)} + \frac{1}{2}\binom{n-4}{5} X_5^{(4)} - \frac{1}{4}\binom{n-6}{3} X_3^{(6)} + \frac{1}{2}\binom{n-8}{1} X_1^{(8)}. \qquad (9)$$

Alle diese Ergebnisse deuten darauf hin, dass sämmtliche mit geraden Zeigern versehenen Coefficienten in der vorgelegten Gleichung (1), deren allgemeiner Repräsentant $X^{(2k)}$ ist (wo man $X^{(0)}$ durch X zu ersetzen hat), willkürlich verbleiben; hingegen sind die mit ungeraden Zeigern versehenen Coefficienten, deren allgemeiner Repräsentant $X^{(2k-1)}$ ist (wo gegenwärtig wie unmittelbar vorher k einen ganzen und positiven Zahlenwerth vorstellt), durch eine Gleichung folgender Form gegeben:

$$X^{(2k-1)} = a^{(1)}\binom{n-2k+2}{1}X_1^{(2k-2)} + a^{(2)}\binom{n-2k+4}{3}X_3^{(2k-4)} + a^{(3)}\binom{n-2k+6}{5}X_5^{(2k-6)}$$
$$+ a^{(4)}\binom{n-2k+8}{7}X_7^{(2k-8)} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + a^{(k-1)}\binom{n-2}{2k-3}X_{2k-3}^{(2)} + a^{(k)}\binom{n}{2k-1}X_{2k-1}, \quad (10)$$

wo die hier eingeführten Coefficienten $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ ..... constante, von k unabhängige Zahlenwerthe vorstellen. So erkennen wir aus den Gleichungen (5 bis 9) für die erstern dieser Coefficienten folgende constante Bestimmungen:

$$a^{(1)} = \frac{1}{2},\ a^{(2)} = -\frac{1}{4},\ a^{(3)} = \frac{1}{2},\ a^{(4)} = -\frac{17}{8},\ a^{(5)} = \frac{31}{2}.$$

Dass es mit dieser Aussage in allen Theilen sein richtiges Bewenden habe, thun wir im Folgenden dar, wobei wir zugleich den Zusammenhang dieser Coefficienten mit den Bernoullischen Zahlen zur Anschauung bringen werden.

3. Wird in der Allgemeinen der Gleichungen (3), in jener so $A^{(k)}$ dargestellt, die Annahme $A^{(k)} = X^{(k)}$ getroffen, so kann sie auch folgendermassen gestellt werden:

$$[1-(-1^k]X^{(k)} = \binom{n}{k}X_k - \binom{n-1}{k-1}X_{k-1}^{(1)} + \binom{n-2}{k-2}X_{k-2}^{(2)} - \ldots$$
$$\ldots (-1)^{k-1}\binom{n-k+1}{1}X_1^{(k-1)},$$

die, wenn k als gerade Zahl, der Form 2k, erklärt wird, in ein von $X^{(2k)}$ freies Resultat übergeht. — Kann nun der so zurück gebliebenen Gleichung, nämlich:

$$0 = \binom{n}{2k}X_{2k} - \binom{n-1}{2k-1}X_{2k-1}^{(1)} + \binom{n-2}{2k-2}X_{2k-2}^{(2)} - \binom{n-3}{2k-3}X_{2k-3}^{(3)} + \ldots$$
$$\ldots - \binom{n-2k+1}{1}X_1^{(2k-1)}, \quad (11)$$

mittelst der Gleichung (10) vorangehender Nr., in der daselbst ausgesprochenen Weise ein Genüge geschehen, so ist der daselbst angedeutete Nachweis geleistet, — wozu wir auch sofort übergehen.

Aus Gleichung (10) zieht man, wenn k nach und nach durch 1, 2, 3, ... k ersetzt wird, die Bestimmungen von $X^{(1)}$, $X^{(3)}$, $X^{(5)} \ldots X^{(2k-1)}$ durch die Functionen X, $X^{(2)}$, $X^{(4)} \ldots X^{(2k-2)}$ und deren Differenzialquotienten nach x ausgedrückt; setzen wir die so gewonnenen Ergebnisse in die identisch zu realisirende Gleichung (11) ein, dann geht sie unmittelbar über in:

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \binom{n}{2k} X_{2k} - a^{(1)} \binom{n-1}{2k-1} \binom{n}{1} X_{2k} \\
& + \binom{n-2}{2k-2} X^{(2)}_{2k-2} - \binom{n-3}{2k-3} \left\{ a^{(1)} \binom{n-2}{1} X^{(2)}_{2k-2} + a^{(2)} \binom{n}{3} X_{2k} \right\} \\
& + \binom{n-4}{2k-4} X^{(4)}_{2k-4} - \binom{n-5}{2k-5} \left\{ a^{(1)} \binom{n-4}{1} X^{(4)}_{2k-4} + a^{(2)} \binom{n-2}{3} X^{(2)}_{2k-2} + a^{(3)} \binom{n}{5} X_{2k} \right\} \\
& \quad \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
& + \binom{n-2k+2}{2} X^{(2k-2)}_{2} - \binom{n-2k+1}{1} \left\{ a^{(1)} \binom{n-2k+2}{1} X^{(2k-2)}_{2} + a^{(2)} \binom{n-2k+4}{3} X^{(2k-4)}_{4} \right. \\
& \qquad \left. + \ldots . a^{(k-1)} \binom{n-2}{2k-3} X^{(2)}_{2k-2} + a^{(k)} \binom{n}{2k-1} X_{2k} \right\},
\end{aligned}
$$

aus der leicht folgende gezogen wird:

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \left\{ 1 - \binom{2k}{1} a^{(1)} - \binom{2k}{3} a^{(2)} \ldots - \binom{2k}{2k-1} a^{(k)} \right\} \binom{n}{2k} X_{2k} \\
& + \left\{ 1 - \binom{2k-2}{1} a^{(1)} - \binom{2k-2}{3} a^{(2)} \ldots - \binom{2k-2}{2k-3} a^{(k-1)} \right\} \binom{n-2}{2k-2} X^{(2)}_{2k-2} \\
& + \left\{ 1 - \binom{2k-4}{1} a^{(1)} - \binom{2k-6}{3} a^{(2)} \ldots - \binom{2k-4}{2k-5} a^{(k-2)} \right\} \binom{n-4}{2k-4} X^{(4)}_{2k-4} \\
& + \quad \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
& + \left\{ 1 - \binom{6}{1} a^{(1)} - \binom{6}{3} a^{(2)} - \binom{6}{5} a^{(3)} \right\} \binom{n-2k+6}{6} X^{(2k-6)}_{6} \\
& + \left\{ 1 - \binom{4}{1} a^{(1)} - \binom{4}{3} a^{(2)} \right\} \binom{n-2k+4}{4} X^{(2k-4)}_{4} \\
& + \left\{ 1 - \binom{2}{1} a^{(1)} \right\} \binom{n-2k+2}{2} X^{(2k-2)}_{2} .
\end{aligned}
$$

Dieser Gleichung kann in der That bei jedweder Verfügung über die mit geraden Zeigern versehenen Functionen: X (oder $X^{(0)}$), $X^{(2)}$, $X^{(4)} \ldots . X^{(2k-2)}$ identisch ein Genüge geschehen, wenn man die Zahlenwerthe von $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)} \ldots a^{(k)}$ folgenden Gleichungen gemäss besimmt:

$$
\left.
\begin{aligned}
& \binom{2}{1} a^{(1)} = 1 , \\
& \binom{4}{3} a^{(2)} + \binom{4}{1} a^{(1)} = 1 , \\
& \binom{6}{5} a^{(3)} + \binom{6}{3} a^{(2)} + \binom{6}{1} a^{(1)} = 1 , \\
& \quad \cdots \cdots \cdots \cdots \\
& \binom{2k}{2k-1} a^{(k)} + \binom{2k}{2k-3} a^{(k-1)} + \binom{2k}{2k-5} a^{(k-2)} + \ldots \binom{2k}{1} a^{(1)} = 1 .
\end{aligned}
\right\} (12)
$$

Die Anzahl, wie die Formen dieser Gleichungen lassen keinen Zweifel über die unzweideutige Bestimmbarkeit sämmtlicher Grössen $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(k)}$ zurück; — womit denn auch der wichtigste Theil des zu leistenden Nachweises als vollständig erreicht erklärt werden darf.

4. Indem wir uns dem Schlusstheile der nachzuweisenden Aussage, der allgemeinen Bestimmung von $a^{(k)}$ aus den eben aufgestellten Gleichungen (12), zuwenden, ersetzen wir in der Allgemeinen dieser Gleichungen die Zahlengrösse $a^{(k)}$ durch eine andere $b^{(k)}$ folgender Gleichung gemäss:

$$a^{(k)} = 1.2.3....(2k-1)b^{(k)}, \qquad (13)$$

so dass man:

$$a^{(1)} = 1.b^{(1)},\ a^{(2)} = 1.2.3\,b^{(2)},\ a^{(3)} = 1.2.3.4.5\,b^{(3)} \text{ u. s. w.}$$

hat; dividirt man hierauf sämmtliche Glieder besagter allgemeinen Gleichung durch $1.2.3....2k$, so hat man folgende Recursion zur Bestimmung von $b^{(k)}$:

$$b^{(k)} + \frac{b^{(k-1)}}{1.2.3} + \frac{b^{(k-2)}}{1.2.3.4.5} + \cdots \frac{b^{(1)}}{1.2.3\ldots(2k-1)} = \frac{1}{1.2.3\ldots 2k}. \qquad (14)$$

Stellt man behufs Auflösung dieser Gleichung folgende Gleichungen fest:

$$U_{2k} = \frac{2(-1)^{k-1}}{\pi^{2k}}\left\{1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \text{in inf.}\right\},$$

$$V_{2k} = \frac{2(-1)^{k}}{\pi^{2k}}\left\{1 - \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} - \frac{1}{4^{2k}} + \text{in inf.}\right\},$$

so hat man (Ir. Nr. 180):

$$U_{2k} + \frac{U_{2k-2}}{1.2.3} + \frac{U_{2k-4}}{1.2.3.4.5} + \cdots$$
$$\cdots \frac{U_2}{1.2.3\ldots(2k-1)} + \frac{1}{1.2.3\ldots(2k+1)} = \frac{1}{1.2.3\ldots 2k},$$

$$V_{2k} + \frac{V_{2k-2}}{1.2.3} + \frac{V_{2k-4}}{1.2.3.4.5} + \cdots$$
$$\cdots \frac{V_2}{1.2.3\ldots(2k-1)} + \frac{1}{1.2.3\ldots(2k+1)} = 0.$$

Führt man eine neue Zahlengrösse $c^{(k)}$ durch folgenden Zusammenhang ein:

$$c^{(k)} = U_{2k} - V_{2k} - b^{(k)},$$

so gelangt man sehr bald auf folgende Recursion:

$$c^{(k)} + \frac{c^{(k-1)}}{1.2.3} + \frac{c^{(k-2)}}{1.2.3.4.5} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \frac{c^{(2)}}{1.2.3\ldots(2k-3)} + \frac{c^{(1)}}{1.2.3\ldots(2k-1)} = 0;$$

wird hier k nach und nach $= 1, 2, 3 \ldots k$ gesetzt, so gelangt man in gleicher Folge auf die Bestimmungen: $c^{(1)} = 0$, $c^{(2)} = 0, \ldots c^{(k)} = 0$ d. h. man hat:

$$U_{2k}' - V_{2k} - b^{(k)} = 0,$$

woraus:

$$b^{(k)} = \frac{4(-1)^{k-1}}{\pi^{2k}} \left\{ 1 + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{5^{2k}} + \frac{1}{7^{2k}} + \text{in inf.} \right\},$$

oder auch:

$$b^{(k)} = \frac{4(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} (2^{2k}-1) S_{2k} \qquad (15)$$

gefolgert wird, wobei man:

$$S_{2k} = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \text{in inf.}$$

gesetzt hat.

Stellt man die kte Bernoullische Zahl durch B_k dar, so hat man, wie bekannt:

$$B_k = 1.2.3.\ldots.2k \cdot \frac{2}{(2\pi)^{2k}} \cdot S_{2k},$$

daher hat man auch:

$$b^{(k)} = 2(-1)^{k-1} \cdot \frac{2^{2k}-1}{1.2.3.\ldots.2k} B_k, \qquad (15')$$

und endlich beachtend die Gleichung (13):

$$a^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}}{k} (2^{2k}-1) B_k, \qquad (16)$$

wo man folgende Bestimmungen hat:

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42},\ B_4 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{5}{66},\ B_6 = \frac{691}{2730},$$

$$B_7 = \frac{7}{6},\ B_8 = \frac{3617}{510},\ B_9 = \frac{43867}{798},\ B_{10} = \frac{174611}{330} \text{ u. s. w.}$$

5. Nunmehr auch die Zahlenwerthe von $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}, \ldots$ bestimmt, oder auf die bekannten Bernoullischen zurückgebracht worden sind, kann folgender Satz, als bereits erwiesen, mitgetheilt werden:

„Die in (1) unterlegte lineare Differenzialgleichung:

$$Xy_n + X^{(1)}y_{n-1} + X^{(2)}y_{n-2} + \ldots . X^{(n-1)}y_1 + X^{(n)}y = 0 \qquad (I)$$

„geniesst der Eigenthümlichkeit, dass jede ihrer particulären Integral-„auflösungen zugleich einen integrirenden Multiplikator derselben, wie „auch umgekehrt (falls dieser bloss die absolute Variable umfasst) vor-„stellt, wenn die mit geraden Zeigern versehenen Coefficienten, wie „X (oder $X^{(0)}$), $X^{(2)}$, $X^{(4)}$..... beliebige Functionen von x sind, „hingegen die mit ungeraden Zeigern versehenen unter besagten Coef-„ficienten den folgenden Gleichungen gemäss von jenen abhängen:

$$X^{(1)} = \frac{2^2-1}{1} B_1 \binom{n}{1} \frac{dX}{dx},$$

$$X^{(3)} = \frac{2^2-1}{1} B_1 \binom{n-2}{1} \frac{dX^{(2)}}{dx} - \frac{2^4-1}{2} B_2 \binom{n}{3} \frac{d^3X}{dx^3},$$

$$X^{(5)} = \frac{2^2-1}{1} B_1 \binom{n-4}{1} \frac{dX^{(4)}}{dx} - \frac{2^4-1}{2} B_2 \binom{n-2}{3} \frac{d^3X^{(2)}}{dx^3} + \frac{2^6-1}{3} B_3 \binom{n}{5} \frac{d^5X}{dx^5},$$

. . . . . .

$$X^{(2k-1)} = \sum_{r=1}^{r=k} (-1)^{r-1} \cdot \frac{2^{2r}-1}{r} B_r \binom{n-2k+2r}{2r-1} \frac{d^{2r-1}X^{(2k-2r)}}{dx^{2r-1}}, \qquad (II)$$

wo B_r die rte Bernoullische Zahl ist, und wo man $X^{(0)}$ durch X zu ersetzen hat."

Mit Hilfe dieses allgemeinen Ergebnisses sind folgende specielle erhalten worden:

$$Xy_1 + \frac{1}{2}X_1 y = 0,$$

$$Xy_2 + X_1 y_1 + X^{(2)}y = 0,$$

$$Xy_3 + \frac{3}{2}X_1 y_2 + X^{(2)}y_1 + \frac{1}{2}\left(X_1^{(2)} - \frac{1}{2}X_3\right)y = 0,$$

$$Xy_4 + 2X_1 y_3 + X^{(2)}y_2 + (X_1^{(2)} - X_3)y_1 + X^{(4)}y = 0,$$

die respective lineare Differenzialgleichungen 1ster, 2ter, 3ter und 4ter Ordnung sind, in denen X, $X^{(2)}$, $X^{(4)}$ beliebige Functionen von x sind, und die diesen Functionen unten beigesetzten Zeiger die Ordnungszahlen der Differenzialquotienten je der betreffenden Function nach dem Argumente x anzeigen.

Jede dieser Differenzialgleichungen nun hat die Eigenthümlich-

keit, dass ein integrirender Multiplikator derselben (als Function von x auftretend) zugleich eine particuläre Bestimmung für y, d. h. eine particuläre Integralauflösung derselben abgibt, wie umgekehrt.

6. Zum Beschlusse dieses Gegenstandes theilen wir noch einiges hierauf Bezügliche, die allgemeine lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung betreffende mit; wir unterziehen nämlich die lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung:

$$Xy_2 + X_1y_1 + X^{(2)}y = 0\,, \tag{17}$$

wo X und $X^{(2)}$ beliebige Functionen von x sind, und $X_1 = \frac{dX}{dx}$ ist, einer besondern Discussion.

Wir schicken die Bemerkung voraus, dass man jede lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung, nämlich:

$$Xy_2 + X^{(1)}y_1 + X^{(2)}y = 0\,, \tag{18}$$

wo nicht nur X und $X^{(2)}$, sondern auch $X^{(1)}$ eine beliebige Function von x ist, durch eine Umstellung (Ir. Nr. 476) auf die in (17) festgestellte Form bringen kann. — In der That, multiplicirt man diese Gleichung (18) mit einer unbekannten, durch $\varphi(x)$ angedeuteten Function von x, wodurch sie die Form:

$$\varphi(x)Xy_2 + \varphi(x)X^{(1)}y_1 + \varphi(x)X^{(2)}y = 0$$

annimmt, und bestimmt die eingeführte Function $\varphi(x)$ so, dass der Differenzialquotient von $\varphi(x)X$ nach x gleich $\varphi(x)X^{(1)}$ werde; so gelangt man auf die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)} = -\frac{X_1}{X} + \frac{X^{(1)}}{X}\,,$$

welche durch Integration auf:

$$\varphi(x) = \frac{1}{X}e^{\int \frac{X^{(1)}}{X}dx} \tag{19}$$

führt, wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist. Multiplicirt man also die allgemeine lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung in (18) mit der hier für $\varphi(x)$ gewonnenen Bestimmung, so erscheint sie auf die Form in (17) gebracht, bei der jeder integrirende Faktor auch eine particuläre Integralauflösung, wie umgekehrt, ist.

Dieses nun vorausgesezt, wenden wir uns der Gleichung in (17)

zu, auf welche Form jede lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung gebracht werden kann. — Stellt nun:

$$y = f(x)$$

eine particuläre Integralauflösung derselben vor, so stellt (Ir. Nr. 572, Gl. (41′)):

$$y = f(x) \int M^{(1)} dx$$

eine zweite particuläre Integralauflösung derselben dar, wo die durch $M^{(1)}$ vorgestellte Function von x aus folgender linearen Differenzialgleichung erster Ordnung (Ir. Nr. 572, Gl. (42′)) zu ziehen ist:

$$\left\{ X_1 f(x) + 2X f_1(x) \right\} M^{(1)} + X f(x) M_1^{(1)} = 0 ,$$

in der ein unten beigesetzter Zeiger 1 jedesmal den ersten Differenzialquotienten der betreffenden Function nach x andeutet. Diese Gleichung ist mit folgender gleichbedeutend:

$$\frac{M_1^{(1)}}{M^{(1)}} + \frac{X_1}{X} + 2\frac{f_1(x)}{f(x)} = 0 ,$$

die integrirt, auf:

$$\log \cdot M^{(1)} + \log \cdot X + \log \cdot f(x)^2 = \log a ,$$

oder auf:

$$M^{(1)} = \frac{a}{X f(x)^2}$$

führt, wo a die Integrationsconstante ist. — Diesem nach ist die zweite particuläre Integralauflösung, falls man nämlich die Constante a durch die Einheit ersetzt, durch die Gleichung:

$$y = f(x) \int \frac{dx}{X f(x)^2} \qquad (20)$$

dargestellt.

Zu demselben Resultate gelangt man auch ohne Zuziehung der citirten Hilfssätze meiner Integralrechnung auf folgende Wege:

Stellt man neben der Gleichung (17) auch folgende auf:

$$X z_2 + X_1 z_1 + X^{(2)} z = 0 , \qquad (17')$$

so ist jede Bestimmung für y aus (17) ein integrirender Faktor zu (17′), wie umgekehrt, jede Bestimmung von z aus (17′) ein integrirender Faktor zu (17) ist. Verbindet man nun (17 und 17′) durch Elimination von $X^{(2)}$, so gelangt man auf:

$$X(zy_2 - yz_2) + X_1(zy_1 - yz_1) = 0\,,$$

welche vollständig integrirt, auf:

$$X(zy_1 - yz_1) = a\,,$$

oder:

$$zy_1 - yz_1 = \frac{a}{X}$$

führt. Dividirt man beiderseits durch z^2 und integrirt abermals vollständig, so gelangt man auf:

$$\frac{y}{z} = a\int\frac{dx}{Xz^2} + b\,,$$

wo a und b die Integrationsconstanten sind. Ersetzt man erstere durch 1 und letztere durch 0, so gelangt man noch einmal auf die vorhin aufgestellte Gleichung (20).

Da man dieses Ergebniss in (20) auch auf jede allgemeine lineare Differenzialgleichung, wie die in (18), übertragen kann, wenn man X durch $X\varphi(x)$, oder durch $e^{\int\frac{X^{(1)}}{X}dx}$ ersetzt, so stellt sich folgende Aussage als begründet heraus:

Weun

$$y = f(x) \text{ und } y = f'(x)$$

particuläre Integrelauflösungen der allgemeinen linearen Differenzialgleichung zweiter Ordnung in (18) vorstellen: so besteht zwischen den Functionen f(x) und f'(x) folgende gegenseitige Beziehung:

$$f'(x) = f(x)\int\frac{dx}{f(x)^2\,e^{\int\frac{X^{(1)}}{X}dx}}\,. \qquad (21)$$

Für den besondern Fall:

$$Xy_2 + X^{(2)}y = 0 \qquad (\alpha)$$

ergibt sich sonach:

$$f'(x) = f(x)\int\frac{dx}{f(x)^2}\,. \qquad (\beta)$$

Für den zweiten besondern Fall endlich:

$$y_2 + \frac{a}{x}y_1 + X^{(2)}y = 0\,, \qquad (\alpha')$$

wo a eine allgemeine Constante und $X^{(2)}$ eine beliebige Function von x bedeutet, ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$f'(x) = f(x)\int\frac{dx}{x^a f(x)^2}\,. \qquad (\beta')$$

B.

Ueber die Darstellung des Ergänzungsgliedes bei der näherungsweisen Berechnung eines bestimmten Integrals einer Variabeln nach der Methode der Quadraturen.

1. Nach einem von Poisson herrührenden Satze (Ir. Nr. 234) besteht folgende Gleichung:

$$\int_0^a \varphi(x)dx = v\left\{\frac{1}{2}\varphi(o)+\varphi(v)+\varphi(2v)+\ldots.\varphi(n-1)v+\frac{1}{2}\varphi(a)\right\}$$
$$-\left\{\varphi_1(a)-\varphi_1(o)\right\}B_1\frac{v^2}{1.2}+\left\{\varphi_3(a)-\varphi_3(o)\right\}B_2\frac{v^4}{1.2.3.4}$$
$$-\left\{\varphi_5(a)-\varphi_5(o)\right\}B_3\frac{v^6}{1.2....6}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots(-1)^m\left\{\varphi_{2m-1}(a)-\varphi_{2m-1}(o)\right\}B_m\frac{v^m}{1.2.3...2m}$$
$$+2(-1)^{m+1}\left(\frac{v}{2\pi}\right)^{2m}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{2m}}\int_0^a\varphi_{2m}(x)\cos\frac{2k\pi x}{v}dx,$$

wo n ganz, positiv und der Gleichung $nv = a$ genügt; wo ferner

$$B_r = 1.2.3.....2r\,Y_{2r} \quad \text{und}$$
$$Y_{2r} = \frac{2}{(2\pi)^{2r}}\left\{1+\frac{1}{2^{2r}}+\frac{1}{3^{2r}}+\frac{1}{4^{2r}}+\text{in inf.}\right\}$$

ist, so dass B_r die rte Bernoullische Zahl vorstellt.

Wird noch das bestimmte Integral, das oben hinter dem Summenzeichen steht, durch theilweise Integration umgeformt, wodurch man auf:

$$\int_0^a\varphi_{2m}(x)\cos\frac{2k\pi x}{v}dx = -\frac{v}{2k\pi}\int_0^a\varphi_{2m+1}(x)\sin\frac{2k\pi x}{v}dx$$

geführt wird, so hat man folgende statt der unterlegten Gleichung:

$$\int_0^a\varphi(x)dx = v\left\{\frac{1}{2}\varphi(o)+\varphi(v)+\varphi(2v)+\ldots.\varphi((n-1)v)+\frac{1}{2}\varphi(a)\right\}$$
$$-\left\{\varphi_1(a)-\varphi_1(o)\right\}\frac{B_1v^2}{1.2}+\left\{\varphi_3(a)-\varphi_3(o)\right\}\frac{B_2v^4}{1.2.3.4}$$
$$\ldots\ldots\ldots(-1)^m\left\{\varphi_{2m-1}(a)-\varphi_{2m-1}(o)\right\}\frac{B_mv^{2m}}{1.2.3....2m}$$
$$+R_m, \qquad (1)$$

wo Kürze halber:

$$R_m = 2(-1)^m \frac{v^{2m+1}}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2m+1}} \int_0^a \varphi_{2m+1}(x) \sin \frac{2k\pi x}{v} dx \qquad (2)$$

gesetzt worden ist.

Diese Grösse R_m stellt das in der Ueberschrift angedeutete Ergänzungsglied vor, dessen Umbildung, oder Darstellung durch die Jakob Bernoullische Function der eigentliche Zweck vorliegenden Abschnittes ist.

2. Weil nach dem Vorausgeschickten $a = nv$ ist, hat man:

$$\int_0^a \varphi_{2m+1}(x) \sin \frac{2k\pi x}{v} dx = v \int_0^n \varphi_{2m+1}(vx) \sin 2k\pi x \, dx ;$$

wenn nun das bestimmte Integral rechterhand in eine Summe von Integralen, die sich respective von 0 bis 1, von 1 bis 2, von 2 bis 3 u. s. w. erstrecken, zerlegt wird, so hat man auch:

$$\int_0^a \varphi_{2m+1}(x) \sin \frac{2k\pi x}{v} dx = v \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1} \int_{\varrho}^{\varrho+1} \varphi_{2m+1}(vx) \sin 2k\pi x \, dx ,$$

oder auch:

$$\int_0^a \varphi_{2m+1}(x) \sin \frac{2k\pi x}{v} dx = v \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1} \int_0^1 \varphi_{2m+1}(v\varrho + vx) \sin 2k\pi x \, dx.$$

Diesem nach geht Gleichung (2) vorangehender Nr. über in:

$$R_m = 2(-1)^m \frac{v^{2m+2}}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{k^{2m+1}} \right) \varphi_{2m+1}(v\varrho + vx) dx. \qquad (3)$$

Führen wir nun die dem geraden Exponenten entsprechende Jakob Bernoullische Function, die wir beständig durch $B''(x)$ vorstellen, ein, nämlich setzen wir:

$$B''(x) = \frac{x^{2m+1}}{2m+1} - \frac{1}{2} x^{2m} + \frac{1}{2} \binom{2m}{1} B_1 x^{2m-1} - \frac{1}{4} \binom{2m}{3} B_2 x^{2m-3}$$
$$+ \frac{1}{6} \binom{2m}{5} B_3 x^{2m-5} - \ldots . \frac{(-1)^{m-1}}{2m} \binom{2m}{2m-1} B_m x , \qquad (4)$$

welche Function die Summe der geraden Potenzen:

$$1^{2m} + 2^{2m} + 3^{2m} + \ldots\ldots (x-1)^{2m} ,$$

für jeden ganzen und positiven Werth von x darstellt; so haben wir in einer hierauf bezüglichen Abhandlung (im 42. Bande des Crell-schen Journals) folgende Gleichheit:

$$\frac{2(-1)^{m+1}}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{k^{2m+1}} = \frac{B''(x)}{1.2.3\ldots 2m},$$

für alle reellen Werthe von $x = 0$ bis $x = 1$ dargethan. Diesem nach hat man:

$$R_m = -\frac{v^{2m+2}}{1.2.3\ldots.2m} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1} \int_0^1 B''(x)\varphi_{2m+1}(v\varrho + vx)dx;$$

und wenn noch Kürze halber folgende Gleichung festgestellt wird:

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1} \varphi_{2m+1}(\varrho v + vx) = \Phi(x), \qquad (5)$$

hat man auch:

$$R_m = -\frac{v^{2m+2}}{1.2.3\ldots.2m} \int_0^1 B''(x)\Phi(x)dx, \qquad (6)$$

welcher Gleichung durch folgende Betrachtung eine noch andere Form gegeben werden kann.

Führt man auch die einem ungeraden Exponenten entsprechende Bernoullische Function ein, die wir durch $B'(x)$ darzustellen pflegen, und die folgender Form ist:

$$B'(x) = \frac{x^{2m+2}}{2m+2} - \frac{1}{2}x^{2m+1} + \frac{1}{2}\binom{2m+1}{1}B_1x^{2m} - \frac{1}{4}\binom{2m+1}{3}B_2x^{2m-2}$$
$$+ \frac{1}{6}\binom{2m+1}{5}B_3x^{2m-4} - \ldots \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m+1}{2m-1}B_mx^2, \qquad (7)$$

welche Function folgende Summe der ungeraden Potenzen:

$$1^{2m+1} + 2^{2m+1} + 3^{2m+1} + \ldots\ldots (x-1)^{2m+1},$$

für alle ganzen und positiven Werthe von x vorstellt; so hat man aus Vergleichung dieser Function mit jener in (4) folgende Gleichheit:

$$B''(x) = \frac{1}{2m+1}\frac{d.B'(x)}{dx}.$$

Wenn nun dieses Ergebniss in (6) eingeführt, hierauf p.p integrirt wird; so stellt sich, beachtend dass sowohl $B'(1) = 0$ wie $B'(0) = 0$ ist, auch folgende Bestimmungsform für R_m heraus:

$$R_m = \frac{v^{2m+2}}{1.2.3....(2m+1)} \int_0^1 B'(x)\Phi_1(x)\,dx. \qquad (8)$$

Somit haben wir denn das Ausgangs vorangehender Nr. vorgeführte Ergänzungsglied R_m von einem bestimmten Integrale abhängig dargestellt, das, wie die Gleichungen (6 und 8) zeigen, die eine oder die andere Jakob Bernoullische Function $B''(x)$ oder $B'(x)$ implicirt.

Mit Hilfe dieser Gleichung (8) geht Gleichung (1) vorangehender Nr. über in·

$$\int_0^a \varphi(x)dx = v\left\{\frac{1}{2}\varphi(o)+\varphi(v)+\varphi(2v)+\ldots\varphi((n-1)v)+\frac{1}{2}\varphi(a)\right\}$$
$$+\sum_{r=1}^{r=m}(-1)^r\left\{\varphi_{2r-1}(a)-\varphi_{2r-1}(0)\right\}\frac{B_r v^{2r}}{1.2.3....2r}$$
$$+\frac{v^{2m+2}}{1.2.3...(2m+1)}\int_0^1 B'(x)\Phi_1(x)dx,$$

wo $nv = a$, B_r die rte Bernoullische Zahl und endlich $\Phi_1(x)$ den Differenzialquotienten von $\Phi(x)$ (Gl. 5) nach x bedeutet.

Stellt man in ähnlicher Weise das bestimmte Integral $\int_0^b \varphi(x)dx$ her, wo $b-a$ reell und positiv ist; nimmt man $b = n'v$ an und subtrahirt von der so herzustellenden Gleichung die unmittelbar vorher wirklich aufgestellte; so ergibt sich folgende allgemeinere Gleichung:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = v\left\{\frac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+v)+\varphi(a+2v)+..\varphi(b-v)+\frac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$
$$+\sum_{r=1}^{r=m}(-1)^r\left\{\varphi_{2r-1}(b)-\varphi_{2r-1}(a)\right\}\frac{B_r v^{2r}}{1.2.3...2r}$$
$$+\frac{v^{2m+2}}{1.2.3...(2m+1)}\int_0^1 B'(x)F_1(x)dx, \qquad (9)$$

wo folgende Feststellungen getroffen worden sind:

$$b-a = (n'-n)v,$$

$$F(x) = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n'-1}\varphi_{2m+1}(\varrho v+vx) - \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1}\varphi_{2m+1}(\varrho v+vx),$$

die letztere auch folgendermassen gestellt werden kann:

$$F(x) = \sum_{\varrho=n}^{\varrho=n'-1} \varphi_{2m+1}(\varrho v + vx), \qquad (10)$$

oder auch nach Auflösung des Summenzeichens folgendermassen:

$$F(x) = \varphi_{2m+1}(a+vx) + \varphi_{2m+1}(a+v+vx) + \varphi_{2m+1}(a+2v+vx) + \ldots \varphi_{2m+1}(b-v+vx). \qquad (10')$$

Wird weiter statt der Gleichung in (8) (wie unmittelbar vorher geschah) die in (6) unterlegt und gleich wie jene behandelt; so gelangt man zu dem in (9) coordinirten Resultate, nämlich:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = v\left\{\frac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+v)+\varphi(a+2v)+\cdots\varphi(b-v)+\frac{1}{2}\varphi(b)\right\} + \sum_{r=1}^{r=m}(-1)^r\left\{\varphi_{2r-1}(b)-\varphi_{2r-1}(a)\right\}\frac{B_r v^{2r}}{1.2.3....2r} - \frac{v^{2m+2}}{1.2.3...2m}\int_0^1 B''(x)F(x)dx, \qquad (11)$$

so dass hier das Ergänzungsglied von der Bernoullischen Function $B''(x)$, während es in Gleichung (9) von der coordinirten Function $B'(x)$ abhängig erscheint.

Ehe wir zur Mittheilung von Folgerungen aus diesen Ergebnissen (9 und 11) übergehen, erachten wir die Bemerkung am Platze, dass das Ergebniss in (9) mit einem von H. Malmsten im 35. Bande des Crell'schen Journals (Seite 68) mitgetheiltem Resultate fast übereinstimmt. Die von diesem geistreichen Analysten dort gebrauchte Function $\varphi(z)$ steht in sehr naher Beziehung zu der Bernoullischen Funtion $B'(x)$. Stellt man nämlich diese Bernoullische Function durch $'B(x)$ vor, falls die in derselben auftretende Grösse m um eine Einheit verringert wird, so überzeugt man sich sehr bald von der Identität folgender Gleichung:

$$\varphi(z) = \frac{h^{2m}}{1.2.3...(2m-1)}\,'B\left(\frac{z}{h}\right),$$

so dass Alles, was von der Function $B'(x)$ oder auch $'B(x)$ bekannt ist, nunmehr sehr leicht auf die von H. Malmsten eingeführte Function $\varphi(z)$ übertragen werden kann, wo man sonach auf dieselben Resultate wie in der citirten Abhandlung, wie auch auf mehrere andere, nicht minder interessante geführt werden kann, womit wir uns im Folgenden befassen werden.

3. Behufs leichter Beurtheilung der in den Gleichungen (9 u. 11) vorkommenden Ergänzungsglieder, oder der je auf der dritten Zeile besagter Gleichungen enthaltenen Ausdrücke, untersuchen wir die Beschaffenheit der Bernoullischen Functionen $B'(x)$ und $B''(x)$ innerhalb der auf x Bezug habenden Integrationsgrenzen 0 und 1.

a) Fassen wir zunächst die Function $B'(x)$, wie solche durch Gleichung (7) vorangehender Nr. festgestellt worden ist, ins Auge und stellen ihre sämmtlichen, aufeinander folgenden Differenzialquotienten nach x her, wo also der höchste noch angebbare Differenzialquotient, der $(2m+2)$te, gleich $1.2.3...(2m+1)$ sein wird; so bieten diese neben einander zu stellenden Ergebnisse folgende Reihe von Functionen dar:

$$B'(x),\ B'_1(x),\ B'_2(x),\ B'_3(x)\ldots\ldots B'_{2m+1}(x),\ B'_{2m+2}(x). \qquad (12)$$

Nehmen wir in allen diesen Functionen $x = \omega$ an, wo ω eine reelle, positive und unendlich kleinwerdende Zahlengrösse hier und im weitern Verfolge dieser Abhandlung vorstellt; so werden die Werthe dieser Functionen gewisse Vorzeichen annehmen, die, wenn in umgekehrter Ordnungsfolge neben einander gestellt, folgende Zeichengruppe darbieten:

$$+,\ -,\ +,\ +,\ -,\ -,\ +,\ +,\ldots\ldots(-1)^{m-2},\ (-1)^{m-2},$$
$$(-1)^{m-1},\ (-1)^{m-1},\ (-1)^{m-1}, \qquad (13)$$

wo also das erste Zeichen $+$ dem Werthe von $B'_{2m+2}(x)$, das zweite Zeichen $-$ dem Werthe von $B'_{2m+1}(x)$ u. s. w., wie endlich das Zeichen von $(-1)^{m-1}$ dem Werthe der ursprünglichen Function $B'(x)$ angehört, wenn, wie gesagt, in allen in (12) zusammengestellten Functionen $x = \omega$ angenommen wird. Um weiter die Vorzeichen derselben Functionswerthe, in der gleichen Ordnungsfolge, bei der Annahme $x = 1-\omega$ zu erfahren, rufen wir eine Eigenschaft der Function $B'(x)$ herbei, die in meiner Schrift über die Bernoullische Function durch Gleichung (5) (Seite 18) dargestellt ist. Diese Gleichung bietet gegenwärtig folgende Beziehung dar:

$$B'(1-x) = B'(x), \qquad (14)$$

welche durch successives Differenziren nach x auf folgende zwei Resultate führt:

$$B'_{2r-1}(1-x) = -B_{2r-1}(x),\ B'_{2r}(1-x) = B'_{2r}(x). \qquad (15)$$

Mit Hilfe dieser Gleichheiten nehmen die in (12) zusammengestellten Functionen bei der Annahme $x = 1-\omega$, wenn sie in umgekehrter Ordnungsfolge zusammen gestellt werden, folgende Vorzeichen an:

$$+, +, +, -, -, +, +, -, \ldots\ldots (-1)^{m-2}, \ (-1)^{m-1},$$
$$(-1)^{m-1}, \ (-1)^{m-2}, \ (-1)^{m-1}. \quad (16)$$

Vergleicht man die Zeichenabwechselungen der beiden Gruppen (13 und 16), bei irgend einer Verfügung über m, mit einander; so erkennt man sehr bald, dass ihre Anzahl in beiden Gruppen dieselbe ist. Hieraus geht nun mit Zuziehung des Theorems (A) der „*Analyse des équations determinées*“ von Fourier hervor, dass die Gleichung $B'(x) = 0$ keine reelle Wurzel innerhalb der Grenzen 0 und 1 hat; woraus nun weiter gefolgert werden darf: dass die Bernoullische Function $B'(x)$ für alle reellen Werthe innerhalb 0 und 1 von x ein und dasselbe Vorzeichen, das von $(-1)^{m-1}$, beibehält.

Weil ferner die Function $B'(x)$, den Gleichungen (7 und 14) gemäss, bei $x = 0$ wie bei $x = 1$ Nullwerthe annimmt, aber innerhalb dieser Grenzwerthe von x, wie eben gezeigt worden, Werthe mit demselben Vorzeichen beständig annimmt, so muss sie mindestens für einen dieser Zwischenwerthe einen Maximumzustand der Quantität nach eingehen. Diesen zu finden, berücksichtige man den in vorangehender Nr. angegebenen Differenzialquotienten von $B'(x)$, nämlich:

$$B_1'(x) = (2m+1)B''(x), \quad (17)$$

so hat man sich nunmehr mit der Angabe der reellen Wurzeln der Gleichung $B''(x) = 0$, die innerhalb 0 und 1 fallen, zu befassen. Untersucht man diese Gleichung nach derselben vorhin citirten Vorschrift von Fourier, so gelangt man zur Ueberzeugung, dass nur eine solche Wurzel existirt; bedenkt man ferner, dass die oben citirte Gleichung (5) meiner Schrift über die Bernoullische Function auch folgende Relation darbietet:

$$B''(1-x) + B''(x) = 0, \quad (14')$$

und diese bei der Annahme $x = \frac{1}{2}$ auf:

$$B''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad (18)$$

führt: so erkennen wir, dass die Function $B'(x)$ innerhalb der Werthe 0 und 1 von x nur einen Maximumzustand der Quantität nach eingeht, und zwar trifft dieser bei der Annahme $x = \frac{1}{2}$ ein.

Betreffend endlich den Werth von $B'\left(\frac{1}{2}\right)$ ziehe ich ein Ergeb-

niss zu, das in einer im 42. Bande des Crell'schen Journals enthaltenen Abhandlung über die Bernoullische Function durch Gleichung (11) dargestellt ist, und folgendermassen lautet:

$$B'\left(\frac{1}{2}+x\right)=\frac{x^{2m+2}}{2m+2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\binom{2m+1}{1}B_1x^{2m}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\binom{2m+1}{3}B_2x^{2m-2}$$

$$-\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{2^5}\right)\binom{2m+1}{5}B_3x^{2m-4}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(-1)^m}{2m}\left(1-\frac{1}{2^{2m-1}}\right)\binom{2m+1}{2m-1}B_mx^2+\frac{(-1)^{m+1}}{2m+2}\left(2-\frac{1}{2^{2m+1}}\right)B_{m+1}. \quad (7')$$

Hieraus gewinnt man sofort:

$$B'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(-1)^{m+1}}{2m+2}\left(2-\frac{1}{2^{2m+1}}\right)B_{m+1}, \quad (18')$$

so dass der Ausdruck rechterhand, numerisch, der grösste Werth ist, den die Function $B'(x)$ beim Uebergange von $x=0$ bis $x=1$, nämlich bei $x=\frac{1}{2}$, annimmt.

Bedenkt man noch, dass vermöge Gleichung (7') auch folgende:

$$B'\left(\frac{1}{2}+x\right)=B'\left(\frac{1}{2}-x\right) \quad (19)$$

identisch besteht: so sind wir über den Gang der Function $B'(x)$ von $x=0$ bis $x=1$ folgende Aussagen zu machen in der Lage:

1) An den beiden Grenzwerthen verschwindet die Function.
2) Für alle Zwischenwerthe von x nehmen die Functionswerthe das Vorzeichen von $(-1)^{m-1}$ an.
3) Von $x=0$ bis $x=\frac{1}{2}$ sind die Zahlenwerthe dieser Function in beständigem Wachsen, wo die Function in ihrem grössten Zustande, bei $x=\frac{1}{2}$, den Zahlenwerth:

$$\frac{1}{2m+2}\left(2-\frac{1}{2^{2m+1}}\right)B_{m+1}$$

erreicht; von diesem Maximumzustande an, nämlich von $x=\frac{1}{2}$ bis $x=1$, nimmt diese Function in derselben gleichmässigen Weise ab, wie sie

in der ersten Hälfte des Intervalls von x zugenommen hat.

b. Betreffend die Function $B''(x)$ erkennt man aus Gleichung (4), aus den Gleichungen (14′) und (18), wie endlich aus den vorausgeschickten Mittheilungen über diese Function, dass sie im Bereiche der Integrationsgrenzen von x (0 und 1) lediglich an diesen Grenzwerthen selbst, wie auch noch bei $x = \frac{1}{2}$ verschwindet. Anlangend die Vorzeichen der Functionswerthe innerhalb dieser Grenzen rufe ich die Gleichung (10) aus der oben citirten Abhandlung im 42. Bande des Crell'schen Journals herbei, die folgender Form ist:

$$B''\left(\frac{1}{2}+x\right) = \frac{x^{2m+1}}{2m+1} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\binom{2m}{1}B_1x^{2m-1} + \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\binom{2m}{3}B_2x^{2m-3}$$
$$- \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{2^5}\right)\binom{2m}{5}B_3x^{2m-5} + \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots \frac{(-1)^m}{2m}\left(1-\frac{1}{2^{2m-1}}\right)B_m x. \qquad (4')$$

Wird einerseits in Gleichung (4) $x = \omega$ und anderseits in dieser (4′) $x = -\omega$ gesetzt, so erkennt man, dass $B''(\omega)$ und $B''\left(\frac{1}{2}-\omega\right)$ einerlei Vorzeichen, das von $(-1)^{m-1}$ haben; und da die Gleichung $B''(x) = 0$ keine reelle Wurzel innerhalb 0 und $\frac{1}{2}$ besitzt; so nehmen die Functionswerthe von $B''(x)$ für alle Zwischenwerthe von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}$ das Vorzeichen von $(-1)^{m-1}$ an. Wird ferner in der Gleichung (4′) $x = +\omega$ und in der Gleichung (4) $x = 1-\omega$ gesetzt, beachtet aber hiebei die Gleichung (14′), so erkennt man für $B''\left(\frac{1}{2}+\omega\right)$ wie für $B''(1-\omega)$ abermals ein und dasselbe Vorzeichen, das von $(-1)^m$; innerhalb der Werthe $\frac{1}{2}$ und 1 bietet aber die Gleichung $B''(x) = 0$ keine reelle Wurzel dar: daher sind die Functionswerthe von $B''(x)$ innerhalb der Werthe $\frac{1}{2}$ und 1 von x beständig mit dem Vorzeichen von $(-1)^m$ behaftet. Wird noch endlich in Betracht gezogen, dass aus Gleichung (4′) folgende hervorgeht:

$$B''\left(\frac{1}{2}+x\right) = -B''\left(\frac{1}{2}-x\right), \qquad (19')$$

so erkennt man nicht nur das so eben Dargethane, dass nämlich die Functionswerthe von $B''(x)$ für Werthe von x die grösser als $\frac{1}{2}$, entgegengesetzte Vorzeichen als jene haben, so sie für Werthe von x, die kleiner als $\frac{1}{2}$ sind, darbietet, — sondern man erkennt auch, dass die Werthe von $B''(x)$ bei Werthen von x, die gleichweit von $\frac{1}{2}$ abstehen, der Grösse nach einander gleich seien.

Es verbleibt noch die Erörterung, ob es innerhalb der Werthe 0 und $\frac{1}{2}$ von x, der Quantität nach, mehr als einen Maximumzustand für die Function $B''(x)$ gibt. Dass ein solcher Maximumzustand unzweifelhaft existirt, folgt daraus, dass sie nur an den erwähnten Grenzwerthen und für keinen Werth innerhalb derselben verschwindet. — Hierüber Aufschluss zu erhalten, ziehen wir die Gleichheit (1) der Abhandlung im 42. Bande des mehrmals erwähnten Journals zu, die folgende ist:

$$B''(x) = \frac{2(-1)^{m+1}}{(2\pi)^{2m+1}} 1.2.3.4...2m \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{k^{2m+1}}, \qquad (20)$$

die für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = 1$ identisch Bestand hat. Differenzirt man diese zweimal hinter einander nach x, so hat man für den zweiten Differenzialquotienten, oder $B_2''(x)$, folgende Werthform:

$$B_2''(x) = \frac{2(-1)^m}{(2\pi)^{2m-1}} 1.2\,3....2m \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{k^{2m-1}};$$

stellt man nun durch $''B(x)$ die Werthform der Function $B''(x)$ vor, wenn in dieser m um eine Einheit verringert wird, d. h. setzt man vermöge Gleichheit (20):

$$''B(x) = \frac{2(-1)^m}{(2\pi)^{2m-1}} 1\,2.3...(2m-2) \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{k^{2m-1}},$$

so ist auch:

$$B_2''(x) = 2m(2m-1)\,''B(x). \qquad (21)$$

Nach dem Vorausgeschickten hat die Function $B''(x)$, folglich auch $''B(x)$, für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}$ Werthe mit

einerlei Vorzeichen; daher bietet auch der zweite Differenzialquotient von $B''(x)$ innerhalb derselben Grenzwerthe von x lediglich Resultate mit einerlei Vorzeichen (dem von $(-1)^m$) dar: folglich bietet die in Rede stehende Function $B''(x)$ innerhalb derselben Grenzwerthe $\left(\text{von } x = 0 \text{ bis } x = \frac{1}{2}\right)$, der Quantität nach, nur einen Maximumzustand dar.

Ein gleiches Bewenden hat es nach dem Vorausgeschickten für die Werthe von x, so innerhalb $\frac{1}{2}$ und 1 fallen.

Alles über die Function $B''(x)$ innerhalb der Grenzwerthe 0 und 1 von x hier Gewonnene zusammengefasst, hat man:

1) An den besagten Grenzwerthen, wie auch bei $x = \frac{1}{2}$ verschwindet die Function.

2) Für Werthe von x, die in gleichen Abständen vom Werthe $x = \frac{1}{2}$ sind, nimmt die Function gleich grosse, mit entgegengesetzten Vorzeichen begabte Werthe an.

3) Innerhalb der Grenzen 0 und $\frac{1}{2}$ von x geht die Function, der Quantität nach, nur einen Maximumzustand ein; daher sie auch nach 2) innerhalb der Grenzen $\frac{1}{2}$ und 1 von x einen analogen Maximumzustand eingeht.

Die Vorzeichen dieser beiden gleich grossen Maximazustände sind, wie aus 2) hervorgeht, einander entgegengesetzt. Ueber die Bestimmung seiner Grösse, die sehr bald als nicht unabhängig von m erkannt wird, theilen wir, was uns bis jetzt hierüber bekannt worden, in den folgenden zwei Nrn. mit.

4. In der öft erwähnten Abhandlung des Crell'schen Journals sind wir (Gl. 14) auf die Gleichheit:

$$MB''(x) = \sin 2\pi x \int_0^1 \frac{(\log. u)^{2m}}{1+u^2-2u\cos 2\pi x}\, du \qquad (22)$$

geführt worden, wo Kürze halber:

$$M = \frac{1}{2}(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m+1}$$

gesetzt worden ist. In dieser Gleichheit, die für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = 1$ besteht, nehmen wir $x = \frac{1}{4} + \alpha$ an, so gelangen wir auf:

$$MB''\left(\frac{1}{4} + \alpha\right) = \cos 2\pi\alpha \int_0^1 \frac{(\log u)^{2m}}{1 + u^2 + 2u \sin 2\pi\alpha}\, du, \qquad (23)$$

wo wir α kleiner oder höchstens gleich $\frac{1}{4}$ erklären; wird hier noch $\alpha = 0$ angenommen, so hat man auch:

$$MB''\left(\frac{1}{4}\right) = \int_0^1 \frac{(\log u)^{2m}}{1 + u^2}\, du. \qquad (24)$$

Aus der gegenseitigen Vergleichung dieser Resultate in (23 und 24) gelangt man, wenn nur die numerischen Grössen beachtet werden, auf die Ungleichheit:

$$B''\left(\frac{1}{4} + \alpha\right) < B''\left(\frac{1}{4}\right), \quad \left\{\text{von } \alpha = 0 \text{ bis } \alpha = \frac{1}{4}\right\}.$$

Hieraus schliessen wir zunächst, dass der Maximumzustand der Function $B''(x)$ innerhalb der Werthe 0 und $\frac{1}{2}$ von x einem Werthe von x entspricht, der entweder gleich oder kleiner als $\frac{1}{4}$ sei.

Dass die Annahme $x = \frac{1}{4}$ keinen Maximumzustand für $B''(x)$ herbeiführt, sind wir mit Hilfe der Gleichung (23) darzuthun in der Lage. — Wird daselbst $\alpha = -\omega$ angenommen, so gelangt man, beachtend die Bedeutung von ω, auf:

$$MB''\left(\frac{1}{4} - \omega\right) = \int_0^1 \frac{(\log u)^{2m}}{1 + u^2 - 4\pi u\omega}\, du,$$

oder auch:

$$MB''\left(\frac{1}{4} - \omega\right) = MB''\left(\frac{1}{4}\right) + 4\pi\omega \int_0^1 \frac{(\log u)^{2m}}{(1+u^2)^2}\, u\, du,$$

oder endlich auf:

$$M\left\{B''\left(\frac{1}{4} - \omega\right) - B''\left(\frac{1}{4}\right)\right\} = \frac{2\pi\omega}{2^{2m}} \int_0^1 \frac{(\log u)^{2m}}{(1+u)^2}\, du,$$

aus der, wenn gleichfalls nur auf die numerische Grösse Rücksicht genommen wird, sehr bald die Ungleichheit:

$$B''\left(\frac{1}{4}-\omega\right) > B''\left(\frac{1}{4}\right)$$

gefolgert wird: daher ist, wie behauptet worden, der Werth von x $\left(\text{innerhalb } 0 \text{ und } \frac{1}{2}\right)$, der $B''(x)$ einen Maximumwerth beilegt, kleiner als $\frac{1}{4}$.

5. Das unmittelbar vorher Gewonnene unterlegt, hat man die Gleichung:

$$B_1''(x) = 0 \qquad (25)$$

in Beziehung auf jenen reellen Werth von x aufzulösen, der positiv und kleiner als $\frac{1}{4}$ ist.

Wir nehmen $x = \frac{1}{4} - \delta$ an, so wird, nach dem, was Ausgangs vorangehender Nr. erkannt worden ist, δ reell, positiv und kleiner als $\frac{1}{4}$ sein. Erlauben wir uns für eine näherungsweise Bestimmung von δ die zweiten und höhern Potenzen dieser Grösse zu vernachlässigen, so haben wir die Bestimmungsgleichung:

$$B_1''\left(\frac{1}{4}\right) - \delta B_2''\left(\frac{1}{4}\right) = 0,$$

und wenn zur Bestimmung von $B_1''\left(\frac{1}{4}\right)$, $B_2''\left(\frac{1}{4}\right)$ die Gleichheit (20) zweitvorangehender Nr. unterlegt wird, so geht diese nach Unterdrückung der gemeinsamen Faktoren über in:

$$\frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{2m}} - 2\pi\delta \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2m-1}} = 0,$$

die nach Auflösung der Summenzeichen, mit Beachtung folgender Gleichung:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{2m}} = 2 \cdot \frac{2^{2m-1}-1}{2^{2m}-1} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2m}}, \qquad (26)$$

folgende Bestimmung darbietet:

$$\delta = \frac{1}{2^{2m}\pi} \cdot \frac{2^{2m-1}-1}{2^{2m}-1} \cdot \frac{1+\frac{1}{3^{2m}}+\frac{1}{5^{2m}}+\frac{1}{7^{2m}}+\text{in inf.}}{1-\frac{1}{3^{2m-1}}+\frac{1}{5^{2m-1}}-\frac{1}{7^{2m-1}}+\text{in inf.}} \quad (27)$$

Der letzte Bruch in dieser Gleichung, dessen Zähler und Nenner ohne Ende fortlaufende Reihen sind, nähert sich beim beständigen Zunehmen von m ohne Ende der Einheit (bei $m = 10$ geht schon besagter Bruch in 1,00000000011473.. über). Dieses zugegeben, erkennt man, dass mit dem Zunehmen von m die hier eingeführte Grösse δ ohne Ende abnimmt (bei der gleichen Annahme $m = 10$ findet man $\delta = 0{,}00000015178$); womit dann auch die Vernachlässigung der höhern Potenzen von δ gerechtfertiget erscheint.

Mit dieser allgemeinen, aber nur angenäherten Bestimmung von δ stimmt auch die Erfahrung vollkommen überein. — Legt man in der That die Begriffsgleichung der Function $B''(x)$ (Nr. 2, Gl. 4) zu Grunde, stellt aus derselben die abgeleitete $B_1''(x) = 0$ her, sucht dann aus derselben die innerhalb 0 und $\frac{1}{2}$ fallende Wurzel dieser Gleichung für die verschiedenen Verfügungen von $m = 1, 2, 3, 4, 5$; so ergibt sich folgendes Schema von Werthen von x:

Für $m = 1$ ist $x = 0{,}2113248\ldots$
„ $m = 2$ „ $x = 0{,}2403368\ldots$
„ $m = 3$ „ $x = 0{,}2475405\ldots$
„ $m = 4$ „ $x = 0{,}2493817\ldots$
„ $m = 5$ „ $x = 0{,}2498443\ldots$

Man sieht hieraus, dass die Werthe von x bei successiver Zunahme von m sich dem Werthe $\frac{1}{4}$ näheren, woraus die Abnahme von δ unmittelbar hervorgeht. Interessant bleibt immerhin die Genauigkeit, mit der die oben aufgestellte Gleichung (27) die Grösse δ darbietet, falls m nur einigermassen grösssr denn die Einheit angenommen wird.

Bei $m = 4$ findet man sehr bald $\delta = 0{,}000619633\ldots$, daher der betreffende Werth von $x = 0{,}249380367\ldots$ ist, wo also der Unterschied gegen die oben aufgestellte, durch direkte Auflösung der Gleichung $B_1''(x) = 0$ (bei $m = 4$) gewonnene Bestimmung erst in der sechsten Dezimale, um etwas mehr als eine Einheit sich bemerkbar macht.

Bei $m = 5$ findet man noch schneller $\delta = 0{,}00015528\ldots$; daher ist der betreffende Werth von $x = 0{,}249844717\ldots$, wo also

der dem obigen analoge Unterschied gegenwärtig nicht volle vier Einheiten in der siebenten Dezimalstelle beträgt.

6. Nachdem wir den hohen Grad von Genauigkeit, mit der δ durch Gleichung (27) bestimmt, auf theoretischem wie empirischem Wege (wenn m zunimmt) dargethan, verbleibt uns noch die Angabe des Functionswerthes von B''(x), wenn für x dieser Maximumwerth $\frac{1}{4} - \delta$ eingeführt wird.

Stellt man durch B''(g) diesen Maximumzustand der Function B''(x) bei der Annahme $x = \frac{1}{4} - \delta$ dar; so hat man, wenn gleichfalls die zweite und die höhern Potenzen von δ vernachlässiget werden:

$$B''(g) = B''\left(\frac{1}{4}\right) - \delta B_1''\left(\frac{1}{4}\right).$$

Eliminirt man hieraus δ mit Hilfe der Gleichung (27), so hat man:

$$B''(g) = B''\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2^{2m}\pi} \cdot \frac{2^{2m-1}-1}{2^{2m}-1} \cdot B_1''\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2m}}}{\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2m-1}}};$$

ersetzt man hier noch die Werthe von $B''\left(\frac{1}{4}\right)$ und $B_1''\left(\frac{1}{4}\right)$ gemäss der Gleichheit (20), so findet man, beachtend die Gleichung (26), folgende Bestimmung:

$$\frac{B''(g)}{M'} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2m+1}} + \frac{1}{2^{4m-2}}\left(\frac{2^{2m-1}-1}{2^{2m}-1}\right)^2 \cdot \frac{\left(\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2m}}\right)^2}{\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2m-1}}}, \quad (28)$$

wo Kürze halber:

$$M' = 2 \cdot \frac{(-1)^{m+1}}{(2\pi)^{2m+1}} \cdot 1.2.3.4.5 \ldots 2m \quad (29)$$

gesetzt worden ist.

Mittelst dieser Gleichung (28) habe ich folgende specielle Bestimmungen vorgenommen:

Für m = 3 habe ich erhalten B''(g) = 0,00372403 . . .
„ m = 4 „ B''(g) = − 0,00528344 . . .
„ m = 5 „ B''(g) = 0,01204516 . . .

Durch directe Rechnung aus der Funktion $B''(x)$ habe ich folgende Bestimmungen gewonnen:

Für $m = 3$ habe ich erhalten $B''(g) = \quad 0{,}00372357\ldots$
„ $m = 4$ „ $B''(g) = -0{,}00528338\ldots$
„ $m = 5$ „ $B''(g) = \quad 0{,}01204515\ldots$

Auch diese Ergebnisse sprechen für die Brauchbarkeit der Gleichung (28) bei annäherungsweiser Bestimmung von $B''(g)$.

7. Wir wenden uns nunmehr den in Nr. 2 aufgestellten Gleichungen (9 u. 11) wieder zu, auf welche die in den nun folgenden Nrn. gewonnenen Ergebnisse nach und nach zur Anwendung kommen werden.

Die Schlussglieder der citirten Gleichungen (9 und 11) umfassen die Mittel zur Beurtheilung der mit den denselben vorausgehenden Gliedern erzielten Genauigkeit, in der Werthung des betreffenden bestimmten Integrals linkerhand der Gleichheitszeichen. Dieses zu zeigen, schicken wir einen von Dirichlet herrührenden Satz*) voraus, der folgendermassen lautet:

„Wenn **M** den grössten Werth darstellt, den eine Function „$f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ anzunehmen vermag; wenn, analog, „**N** den kleinsten dieser Werthe darstellt; wenn ferner eine andere „Funktion von x, etwa $F(x)$, innerhalb derselben Grenzwerthe von „x einerlei Vorzeichen behält: so bestehen folgende zwei Ungleich„heiten:

$$\text{„}\int_a^b f(x)F(x)\,dx < M\int_a^b F(x)\,dx,$$

$$\text{„}\int_a^b f(x)F(x)\,dx > N\int_a^b F(x)\,dx.\text{“}$$

Die Zahlengrössen in diesem Satze sind sämmtlich reell vorausgesetzt und von je zweien derselben, etwa α und β, wird β die grössere genannt, falls $\beta - \alpha$ einen positiven Werth annimmt.

Der Nachweis dieses Satzes ist zu einfach, dass hier seine Mittheilung wegbleiben kann.

8. Den Hilfsatz vorangehender Nr. zu Grunde gelegt, wenden wir uns zunächst dem im Ergänzungsgliede der Gleichung (9) enthaltenen bestimmten Integrale:

$$u = \int_0^1 B'(x)F_1(x)\,dx$$

zu.

*) Repertorium von Dove und Moser, Band 1, Seite 154.

I. Nach Nr. 3. (a., 2) behält die Bernoullische Function $B'(x)$ für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = 1$ dasselbe Vorzeichen bei. Wenn nun durch g der innerhalb 0 und 1 (diese Grenzen mitbegriffen) fallende Werth von x vorgestellt wird, welcher der Function $F_1(x)$ den numerisch grössten Werth beilegt; wenn k, analog, den numerisch kleinsten Werth dieser Function hervorruft: so hat man nunmehr:

$$u < F_1(g)\int_0^1 B'(x)\,dx, \quad u > F_1(k)\int_0^1 B'(x)\,dx.$$

Nach meiner Schrift über die Jakob Bernoullische Function (Seite 26, Gl. 25) hat man aber:

$$\int_0^1 B'(x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}}{2m+2} B_{m+1},$$

wo B_{m+1} die $(m+1)$te Bernoullische Zahl ist; — daher hat man auch:

$$u < \frac{(-1)^{m-1}}{2m+2} B_{m+1} F_1(g), \quad u > \frac{(-1)^{m-1}}{2m+2} B_{m+1} F_1(k). \qquad (30)$$

Wir ziehen ferner aus Gleichung (10′) der Nr. 2 durch Differenziation nach x:

$$F_1(x) = v\left\{\varphi_{2m+2}(a+vx) + \varphi_{2m+2}(a+vx+v) + \varphi_{2m+2}(a+vx+2v) \right.$$
$$\left. \ldots\ldots\ldots + \varphi_{2m+2}(a+vx+(n'-n-1)v)\right\};$$

daher ist:

$$\left.\begin{aligned} F_1(g) &= v\sum_{\varrho=0}^{\varrho=n'-n-1} \varphi_{2m+2}(a+vg+\varrho v), \\ F_1(k) &= v\sum_{\varrho=0}^{\varrho=n'-n-1} \varphi_{2m+2}(a+vk+\varrho v). \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Wenn nun von den zu summirenden Gliedern in der erstern dieser beiden Gleichungen jenes Glied, das dem Argumente $a+vg+\mu' v$ entspricht, numerisch, den grössten reellen Werth derselbsn vorstellt; — so hat man:

$$F_1(g) < (n'-n)v\,\varphi_{2m+2}(a+vg+\mu' v).$$

Wenn, analog, das numerisch kleinste der zu summirenden Glieder der zweiten Gleichung (31) dem Argumente $a+vk+\lambda' v$ entspricht; — so hat man auch:

$$F_1(k) > (n'-n)v\,\varphi_{2m+2}(a+vk+\lambda' v),$$

wo μ', wie λ' unter sich ungleich, jede aber eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, ... $(n'-n-1)$ sein wird.

Bedenkt man weiter, dass g und k unter sich ebenfalls ungleich, jede aber einen der Werthe von und mit 0 bis und mit 1 vorstellen kann: so ergeben sich folgende zwei Ungleichheiten:

$$F_1(g) < (n'-n)v\varphi_{2m+2}(a+\mu v),$$
$$F_1(k) > (n'-n)v\varphi_{2m+2}(a+\lambda v),$$

wo λ und μ unter einander ungleich, jede aber irgend eines innerhalb 0 und $n'-n$ (diese Grenzen mit begriffen) enthaltenen reellen Zahlenwerthes fähig ist.

Bedenkt man endlich die in Nr. 2 festgestellte Gleichung:

$$(n'-n)v = b-a, \text{ oder } v = \frac{b-a}{n'-n},$$

so gehen nunmehr die aufgestellten Ungleichheiten in (30) über in folgende:

$$u < \frac{(-1)^{m-1}}{2m+2}(b-a)B_{m+1}\varphi_{2m+2}\left(a+\frac{\mu}{n'-n}(b-a)\right),$$
$$u > \frac{(-1)^{m-1}}{2m+2}(b-a)B_{m+2}\varphi_{2m+2}\left(a+\frac{\lambda}{n'-n}(b-a)\right).$$

Da die Brüche $\frac{\mu}{n'-n}$, $\frac{\lambda}{n'-n}$ aller Werthe von 0 bis 1 fähig, und die Function $\varphi_{2m+2}(x)$ im Bereiche derselben Werthe von x continuirlich sein muss: so kann man, beachtend diese eben aufgefundenen Ungleichheiten folgende Formbestimmung für u feststellen:

$$u = \frac{(-1)^{m-1}}{2m+2}(b-a)B_{m+1}\varphi_{2m+2}\left\{a+\vartheta(b-a)\right\},$$

wo ϑ irgend einen reellen Zahlenwerth von 0 bis 1 vorstellt.

Alles dieses zugegeben, stellt sich die Gleichung (9) aus Nr. 2 folgendermassen dar:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = v\left\{\frac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+v)+\varphi(a+2v)+\ldots\varphi(b-v)+\frac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$
$$+\sum_{r=1}^{r=m}(-1)^r\left\{\varphi_{2r-1}(b)-\varphi_{2r-1}(a)\right\}\frac{B_r v^{2r}}{1.2.3\ldots 2r}$$
$$+(-1)^{m+1}(b-a)\cdot\frac{B_{m+1}}{1.2.3\ldots(2m+2)}v^{2m+2}\varphi_{2m+2}\left\{a+\vartheta(b-a)\right\},$$

oder auch, wenn m um eine Einheit verringert wird, folgendermassen:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = v\left\{\frac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+v)+\varphi(a+2v)+\ldots\varphi(b-v)+\frac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$
$$+\sum_{r=1}^{r=m-1}(-1)^r\left\{\varphi_{2r-1}(b)-\varphi_{2r-1}(a)\right\}\frac{B_r v^{2r}}{1.2.3\ldots 2r}$$
$$+(-1)^m(b-a)\frac{B_m}{1.2.3\ldots 2m}\varphi_{2m}\left\{a+\vartheta(b-a)\right\}v^{2m}, \qquad (I)$$

wo, wie schon gesagt, ϑ irgend einen reellen Zahlenwerth von 0 bis 1 bedeutet.

II. Wenn, zweitens, die durch $F_1(x)$ vorgestellte Function von x im Bereiche der Integrationsgrenzen von x (von 0 bis 1) einerlei Vorzeichen darbietet, so hat man auch:

$$u < B'(g)\int_0^1 F_1(x)dx,$$

wo g die innerhalb 0 und 1 enthaltene Zahl ist, die der Function $B'(x)$ innerhalb derselben Grenzwerthe von x den numerisch grössten Werth beilegt. Es ist aber nach Nr. 3. (a, 3):

$$g=\frac{1}{2}, \quad B'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(-1)^{m+1}}{2m+2}\left(2-\frac{1}{2^{2m+1}}\right)B_{m+1},$$

daher hat man, wenn nur auf die Grösse gesehen wird, die Ungleichheit:

$$u < \frac{(-1)^{m+1}}{2m+2}\left(2-\frac{1}{2^{2m+1}}\right)B_{m+1}\int_0^1 F_1(x)dx.$$

Vollzieht man die angedeutete Integration und beachtet die Gleichung (10′) der Nr. 2, so ergibt sich endlich:

$$u < \frac{(-1)^{m+1}}{2m+2}\left(2-\frac{1}{2^{2m+1}}\right)\left\{\varphi_{2m+1}(b)-\varphi_{2m+1}(a)\right\}B_{m+1}.$$

Das Bestandhaben dieser Ungleichheit ist an die Bedingung gebunden, dass der Differenzialquotient von F(x), nämlich:

$$F_1(x) = v\left\{\varphi_{2m+2}(a+vx)+\varphi_{2m+2}(a+v+vx)\right.$$
$$\left.+\varphi_{2m+2}(a+2v+vx)+\ldots\varphi_{2m+2}(b-v+vx)\right\},$$

für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = 1$ Resultate mit einerlei Vorzeichen darbiete. Denken wir uns hier x durch $\frac{x}{v}$ ersetzt, so wird

dem eben Gesagten zufolge die $F_1\left(\frac{x}{v}\right)$ darstellende Function von x für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = v$ Resultate mit einerlei Vorzeichen darzubieten haben; so dass die in Rede stehende Bedingung gegenwärtig folgendermassen lautet:

Setzt man abkürzend:

$$\Phi'(x) = \varphi_{2m+2}(a+x) + \varphi_{2m+2}(a+v+x) + \varphi_{2m+2}(a+2v+x) + \ldots \varphi_{2m+2}(b-v+x),$$

so muss die Function $\Phi'(x)$ für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = v$ Resultate mit einerlei Vorzeichen darstellen.

Alles dieses vorausgesetzt, nimmt die in Rede stehende Gleichung (9) der Nr. 2, falls in derselben noch m um eine Einheit verringert wird, folgende Form an:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = v\left\{\frac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+v)+\varphi(a+2v)+\ldots\varphi(b-v)+\frac{1}{2}\varphi(b)\right\} + \sum_{r=1}^{r=m-1}(-1)^r\left\{\varphi_{2r-1}(b)-\varphi_{2r-1}(a)\right\}\frac{B_r}{1.2.3\ldots.2r}v^{2r} + (-1)^m\vartheta\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}\left\{\varphi_{2m-1}(b)-\varphi_{2m-1}(a)\right\}\frac{B_m}{1.2.3\ldots2m}v^{2m}, \quad (II)$$

wo ϑ positiv und kleiner wie 1 ist. Dieses Resultat hat jedoch nur in so fern Bestand, als die Function $\Phi(x)$, wie sie folgende Gleichheit darstellt:

$$\Phi(x) = \varphi_{2m}(a+x)+\varphi_{2m}(a+v+x)+\varphi_{2m}(a+2v+x)\ldots + \varphi_{2m}(b-v+x), \quad (32)$$

für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = v$ Resultate mit einerlei Vorzeichen darstellt.

Ganz analoge Ergebnisse zu den hier in (I und II) mitgetheilten findet man auch in der Ausgangs Nr. 2 citirten Arbeit Malmstens.

9. Einer ähnlichen Discussion unterziehen wir nunmehr die Gleichung (11) aus Nr. 2. Die daselbst auftretende Bernoullische Function $B''(x)$ geniesst innerhalb der in Rede stehenden Integrationsgrenzen des Ergänzungsgliedes (0 und 1) Eigenthümlichkeiten, die wir in Nr. 3. (b. 1, 2, 3) zusammengestellt und die wir hier auch nach und nach in Anspruch nehmen werden.

I. Stellt man die Gleichung fest:

$$u' = \int_0^1 B''(x)F(x)dx,$$

welches bestimmte Integral in dem Ergänzungsgliede der hier unterlegten Gleichung auftritt, so hat man auch:

$$u' = \int_0^{\frac{1}{2}} B''(x)F(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 B''(x)F(x)dx,$$

welche mit der folgenden einerlei ist:

$$u' = \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ B''\left(\frac{1}{2}-x\right)F\left(\frac{1}{2}-x\right) + B''\left(\frac{1}{2}+x\right)F\left(\frac{1}{2}+x\right)\right\} dx,$$

oder, bei Zuziehung der Gleichheit (19') aus Nr. 3, mit folgender:

$$u' = \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ F\left(\frac{1}{2}+x\right) - F\left(\frac{1}{2}-x\right)\right\} B''\left(\frac{1}{2}+x\right) dx. \quad (33)$$

Die Function $B''\left(\frac{1}{2}+x\right)$ behält innerhalb der Werthe 0 und $\frac{1}{2}$ von x das Vorzeichen von $(-1)^m$ bei (Nr. 3, b); wenn daher g den Werth von x vorstellt, welcher der Function $F'(x)$, die folgendermassen bestimmt ist:

$$F'(x) = F\left(\frac{1}{2}+x\right) - F\left(\frac{1}{2}-x\right),$$

innerhalb der Werthe 0 und $\frac{1}{2}$ von x den grössten Werth, der Zahl nach, beilegt (den analogen kleinsten Werth dieser Function ruft augenfällig die Annahme $x = 0$ herbei); so hat man:

$$u' < F'(g) \int_0^{\frac{1}{2}} B''\left(\frac{1}{2}+x\right) dx,$$

oder auch (Gl. 17, Nr. 3):

$$u' < \frac{1}{2m+1} F'(g) \int_0^{\frac{1}{2}} B_1'\left(\frac{1}{2}+x\right) dx,$$

und wenn die Integration rechterhand vollzogen wird, hat man:

$$u' < \frac{1}{2m+1} F'(g) \left\{ B'(1) - B'\left(\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Es ist aber $B'(1) = 0$; daher hat man mit Zuziehung der Gleichung (18') der Nr. 3:

$$u' < \frac{(-1)^m}{(2m+1)(2m+2)}\left(2 - \frac{1}{2^{2m+1}}\right) F'(g)\, B_{m+1}, \quad (34)$$

wo B_{m+1} die $(m+1)$te Bernoullische Zahl ist.

Ziehen wir nun die Gleichung (10′) der Nr. 2. zu, so hat man, beachtend die oben festgestellte Bedeutung von $F'(x)$:

$$\begin{aligned} F'(g) = {} & \varphi_{2m+1}\left(a+\frac{v}{2}+vg\right) - \varphi_{2m+1}\left(a+\frac{v}{2}-vg\right) \\ & + \varphi_{2m+1}\left(a+\frac{3v}{2}+vg\right) - \varphi_{2m+1}\left(a+\frac{3v}{2}-vg\right) \\ & + \varphi_{2m+1}\left(a+\frac{5v}{2}+vg\right) - \varphi_{2m+1}\left(a+\frac{5v}{2}-vg\right) \\ & + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & + \varphi_{2m+1}\left(a+\frac{[2(n'-n)-1]v}{2}+vg\right) - \varphi_{2m+1}\left(a+\frac{[2(n'-n)-1]v}{2}-vg\right), \end{aligned}$$

so dass die allgemeine Form zweier auf einer Zeile vorkommenden und durch Subtraktion verbundenen Ausdrücke, die wir als ein Glied einer aus $n'-n$ Gliedern bestehenden Reihe betrachten, folgende ist:

$$\varphi_{2m+1}\left(a+\frac{1}{2}(2\lambda-1)v+vg\right) - \varphi_{2m+1}\left(a+\frac{1}{2}(2\lambda-1)v-vg\right),$$

wo, um alle Glieder zu erhalten, für λ nach und nach $1, 2, 3 \ldots (n'-n)$ zu setzen ist.

Stellt μ den Werth von λ dar, bei welchem das entsprechende dieser Glieder den grössten numerischen Werth der Zahl nach vorstellt, so ist offenbar:

$$\begin{aligned} F'(g) < (n'-n) \Big\{ & \varphi_{2m+1}\left(a+\frac{1}{2}(2\mu-1)v+vg\right) \\ & - \varphi_{2m+1}\left(a+\frac{1}{2}(2\mu-1)v-vg\right)\Big\}; \end{aligned}$$

und da man nach dem Taylor'schen Satze:

$$f(x+h) - f(x) = h f_1(x+\vartheta h)$$

hat, wo $\vartheta < 1$ ist, so ist letztere Ungleichheit mit folgender gleichbedeutend:

$$F'(g) < 2(n'-n)gv\,\varphi_{2m+2}\left\{a+\left(\mu-\frac{1}{2}+2\vartheta g\right)v\right\},$$

oder auch, beachtend $v(n'-n) = b-a$, mit folgender:

$$F'(g) < 2(b-a)g\,\varphi_{2m+2}\left\{a+\frac{\mu-\frac{1}{2}+2\vartheta g}{n'-n}(b-a)\right\}.$$

Bedenkt man, dass g innerhalb 0 und $\frac{1}{2}$, ϑ innerhalb 0 und 1, wie endlich μ innerhalb 0 und n'—n fällt; so hat man auch:

$$F'(g) < 2(b-a)\, g\varphi_{2m+2}\left\{a+\vartheta(b-a)\right\},$$

wo auch hier ϑ innerhalb 0 und 1 fällt, — und demnach um so mehr:

$$F'(g) < (b-a)\varphi_{2m+2}\left\{a+\vartheta(b-a)\right\}. \qquad (35)$$

Diesem nach nimmt die Ungleichheit (34) folgende Form an:

$$u' < \frac{(-1)^m}{(2m+1)(2m+2)}\left(2-\frac{1}{2^{2m+1}}\right)(b-a)\, B_{m+1}\varphi_{2m+2}(a+\vartheta(b-a)).$$

Führt man dieses Ergebniss in Gleichung (11) ein, verringert hierauf m um eine Einheit: so hat man:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = v\left\{\frac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+v)+\varphi(a+2v)+\ldots\varphi(b-v)+\frac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$
$$+\sum_{r=1}^{r=m-1}\left\{\varphi_{2r-1}(b)-\varphi_{2r-1}(a)\right\}\frac{B_r}{1.2.3....2r}v^{2r}+R_m, \qquad (III)$$

wo für die Ergänzung R_m folgende Ungleichheit besteht:

$$R_m < (-1)^m\cdot\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}(b-a)\,\frac{B_m}{1.2.3...2m}\varphi_{2m}(a+\vartheta(b-a))v^{2m}, \qquad (36)$$

wo ϑ innerhalb 0 und 1 fällt.

Von diesem Ergebnisse bemerke ich jedoch, dass es in der Gleichung (I) vorangehender Nr. enthalten ist, und sonach keine neue Form zur Ermittelung eines bestimmten Integrals darbietet.

II. Gehen wir abermals von der Gleichung:

$$u' = \int_0^1 B''(x)F(x)\,dx$$

aus, mit der besondern Bedingung jedoch, dass die Function F(x), wie sie in Gleichung (10') der Nr. 2 festgestellt ist, für alle Werthe von x, die innerhalb den Integrationsgrenzen (0. und 1) fallen, Resultate mit einerlei Vorzeichen darbietet; so hat man, wenn g einen der zwei Werthe innerhalb dieser Integrationsgrenzen vorstellt, bei welchen die Bernoullische Function B''(x) gleich grosse Maximawerthe der Zahl nach annimmt, die Ungleichheit:

$$u' < B''(g)\int_0^1 F(x)\,dx.$$

Aus Nr. 2 (Gl. 10') zieht man:

$$\int_0^1 F(x)\,dx = \frac{1}{v}\left\{\varphi_{2m}(b) - \varphi_{2m}(a)\right\};$$

sonach hat man:

$$u' < \frac{1}{v} B''(g) \left\{\varphi_{2m}(b) - \varphi_{2m}(a)\right\},$$

wo wir $B''(g)$ nach der gewonnenen Bestimmung in Nr. 6 zu ersetzen haben. — Diesem nach geht die Gleichung (11) über in:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = v\left\{\frac{1}{2}\varphi(a) + \varphi(a+v) + \varphi(a+2v) + \ldots \varphi(b-v) + \frac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$
$$+ \sum_{r=1}^{r=m}\left\{\varphi_{2r-1}(b) - \varphi_{2r-1}(a)\right\}\frac{B_r}{1.2.3\ldots 2r}\cdot v^{2r}$$
$$- \vartheta\left\{\varphi_{2m}(b) - \varphi_{2m}(a)\right\}\frac{B''(g)}{1.2.3\ldots 2m}v^{2m+1}, \qquad \text{(IV)}$$

wo ϑ kleiner wie 1, und $B''(g)$ gemäss Gleichung (28) aus Nr. 6 zu ersetzen ist. Dieses Resultat besteht jedoch nur in so fern, als die Function $F(x)$ der Eingangs erwähnten Bedingung nachkommt, oder besser, als der Differenzialquotient von $\Phi(x)$ nach x in (32), nämlich:

$$\Phi_1(x) = \varphi_{2m+1}(a+x) + \varphi_{2m+1}(a+v+x)$$
$$+ \varphi_{2m+1}(a+2v+x) + \ldots \varphi_{2m+1}(b-v+x), \qquad (37)$$

für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = v$ reelle Werthe mit einerlei Vorzeichen annimmt.

Ersetzen wir noch den Werth von $B''(g)$ in (IV) gemäss den Gleichungen (28 und 29) der Nr. 6, wodurch wir:

$$\frac{(-1)^{m+1}}{2}\cdot\frac{B''(g)}{1.2.3.4\ldots 2m}\cdot(2\pi)^{2m+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2m+1}} + \frac{1}{2^{4m-2}}\left(\frac{2^{2m-1}-1}{2^{2m}-1}\right)^2 \frac{\left(\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2m}}\right)^2}{\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2m-1}}}$$

erhalten, und hieraus, abgesehen vom Zeichen, die Ungleichheit:

$$\frac{B''(g)}{1.2.3.4\ldots 2m} < \frac{2}{(2\pi)^{2m+1}},$$

gefolgert werden kann (nur wenn $m = \infty$, geht der obige Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen in 1 über): so nimmt die obige Gleichung (IV) auch folgende Form an:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = v\left\{\frac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+v)+\varphi(a+2v)+\ldots\varphi(b-v)+\frac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$
$$+\sum_{r=1}^{r=m}(-1)^r\left\{\varphi_{2r-1}(b)-\varphi_{2r-1}(a)\right\}\frac{B_r}{1.2.3\ldots 2r}v^{2r}+R_m\,, \quad (IV')$$

wo man für das Ergänzungsglied R_m, der Grösse nach, die Ungleichheit hat:

$$R_m < \frac{2}{(2\pi)^{2m+1}}\left\{\varphi_{2m}(b)-\varphi_{2m}(a)\right\}v^{2m+1}\,, \qquad (38)$$

welches Resultat ebenfalls nur Bestand hat, als die Function $\Phi_1(x)$ in (37) von $x=0$ bis $x=v$ Resultate mit einerlei Vorzeichen darbietet.

Von der Brauchbarkeit dieses zuletzt gewonnenen Ergebnisses zeugt am besten der in folgender Nr. mitzutheilende besondere Fall.

10. Es sei das bestimmte Integral $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ nach der Methode der Quadraturen zu ermitteln, und hiebei das Increment v zu ermitteln, dass der Fehler kleiner als eine bestimmte, beliebig festzustellende kleine Zahlengrösse ausfalle.

Da man hier $\varphi(x)=e^{-x^2}$ hat, so bietet (Ir. Nr. 245) folgende Differenziationsergebnisse dar:

$$\varphi_{2m}(x)=\left\{\begin{array}{l}(2x)^{2m}-2\binom{2m}{2}(2x)^{2m-2}+3.4\binom{2m}{4}(2x)^{2m-4}\\ -4.5.6\binom{2m}{6}(2x)^{2m-6}+5.6.7.8\binom{2m}{8}(2x)^{2m-8}\\ -\ldots\ldots(-1)^m(m+1)(m+2)\ldots.2m\binom{2m}{2m}\end{array}\right\}e^{-x^2},$$

$$\varphi_{2m+1}(x)=-\left\{\begin{array}{l}(2x)^{2m}-2\binom{2m+1}{2}(2x)^{2m-2}+3.4\binom{2m+1}{4}(2x)^{2m-4}\\ -4.5.6\binom{2m+1}{6}(2x)^{2m-6}+5.6.7.8\binom{2m+1}{8}(2x)^{2m-8}\\ -\ldots.(-1)^m(m+1)(m+2)\ldots 2m\binom{2m+1}{2m}\end{array}\right\}2x\,e^{-x^2}$$

aus denen, weil $a=0$ und $b=\infty$, für jeden endlichen Werth von m folgende Bestimmungen gezogen werden:

$$\varphi_{2m}(b)=0\,,\quad \varphi_{2m}(a)=(-1)^m(m+1)(m+2)(m+3)\ldots 2m\,,$$
$$\varphi_{2m+1}(b)=0\,,\quad \varphi_{2m+1}(a)=0.$$

Die allgemeine Gleichung (IV') bietet sonach:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = v\left\{\frac{1}{2}+e^{-v^2}+e^{-(2v)^2}+e^{-(3v)^2}+\text{in inf.}\right\} \qquad (39)$$

dar, wo die Grösse des Fehlers, wenn durch R_m nach Gleichung (38) dargestellt, folgender Ungleichheit zu genügen hat:

$$R_m < \frac{1}{\pi} \cdot \frac{m+1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{m+2}{(2\pi)^2} \cdot \frac{m+3}{2\pi^2} \cdot \cdots \cdot \frac{2m}{(2\pi)^2} v^{2m+1},$$

falls vom Zeichen abgesehen wird. Sei nun die Gleichung:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{m+1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{m+2}{(2\pi)^2} \cdot \frac{m+3}{(2\pi)^2} \cdot \cdots \cdot \frac{2m}{(2\pi)^2} v^{2m+1},$$

festgestellt, so fällt der Fehler um so kleiner aus, je kleiner der Ausdruck rechterhand vom Gleichheitszeichen bei einer bestimmten Verfügung über v verbleibt. Dieses trifft offenbar ein, wenn $m < 2\pi^2$, oder $m < 19{,}739\ldots$ angenommen wird.

Nimmt man also $m = 19$ an, so ergibt sich zur Bestimmung des Incrementes v die Gleichung:

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{38}} \cdot 20.21.22.23 \ldots . 38\, v^{39} = \varepsilon_m, \qquad (40)$$

woraus ich folgende Bestimmungen gezogen habe:

Bei der Annahme $\varepsilon_m = \frac{1}{10^7}$ fand ich $v = 0{,}7987752\ldots$,

„ $\varepsilon_m = \frac{1}{10^{10}}$ „ $v = 0{,}6691161\ldots$,

„ $\varepsilon_m = \frac{1}{10^{15}}$ „ $v = 0{,}4980769\ldots$;

so dass bei den Incrementen $v = \frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ die Gleichung (39) das fragliche bestimmte Integral mit einer Genauigkeit, die beziehlich sich auf die siebente, zehnte und fünfzehnte Decimale erstreckt, darbietet. So z. B. habe bei $v = \frac{1}{2}$ nach (39) gefunden:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = 0{,}88622692545275802\ldots,$$

welches Ergebniss mit dem bekannten Werth dieses Integrals $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ bis auf die 16te Decimale übereinstimmt, obwohl mir der Nachweis für die Realisirung der hier herrschenden Bedingung betreffend die Function $\Phi_1(x)$ aus Gleichung (37) bis jetzt nicht gelungen ist.

IV.

Werthung des bestimmten Integrals:

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{bx} e^{cxi} dx,$$

wo a, b, c reelle Constanten, e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen und i die imaginäre Einheit ist.

VORWORT.

Bei der in der Ueberschrift getroffenen Feststellung über die Beschaffenheit der drei Constanten a, b, c muss a nothwendig eine positiv angebbare Zahl sein, falls von einer Werthung des überschriebenen Integrals überhaupt nur die Rede sein soll. (Ir. Nr. 106.*). Unter dieser Voraussetzung ist, so weit mein Wissen über das fragliche Integral sich erstreckt, solches bis jetzt nur unter der Annahme eines nicht positiven Werthes von b gewerthet worden. So bestimmte schon Euler besagtes Integral bei $b = 0$, falls c eine angebbare Zahl ist; bei $b = -1$ und $c = 0$ ist besagtes Integral der Repräsentant der von Legendre eingeführten Function $\Gamma(a)$, und kann als Definitionsausdruck dieser Function angesehen werden; wenn endlich c verschieden von Null ist, bestimmte u. A. auch Cauchy das betreffende Integral für jeden negativen Werth von b.

Mit der vorliegenden Mittheilung beabsichtige ich nicht nur die Ergebnisse in den eben vorgeführten Fällen zu verificiren, sondern mein Hauptaugenmerk geht dahin, die bis jetzt offen gelassene Lücke, wenn nämlich die reelle Zahl b eine angebbare positive ist, dann auch auszufüllen, wenn besagtes Integral eines endlichen Werthes noch fähig ist.

---

*) Siehe Anmerkung zu Seite 32 d. M.

I. In der identischen Gleichung:

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty e^{-y^a x} e^{bxi}\, dx \right\} dy = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty e^{-xy^a} dy \right\} e^{bxi} dx$$

stelle a eine reelle, positive Constante vor, die grösser als die Einheit ist, b ebenfalls eine reelle, positive Constante von beliebiger Grösse und endlich sei i die imaginäre Einheit, oder $\sqrt{-1}$.

Behufs Integration der hier innerhalb der Klammern enthaltenen Ausdrücke bemerken wir zunächst, dass:

$$\int_0^\infty e^{-y^a x} e^{bxi}\, dx = \int_0^\infty e^{-y^a x} \cos bx\, dx + i \int_0^\infty e^{-y^a x} \sin bx\, dx$$

ist, woraus mit Zuziehung der Gleichungen (53) (Ir. Nr. 159) folgende gezogen wird:

$$\int_0^\infty e^{-y^a x} e^{bxi}\, dx = \frac{y^a}{b^2+y^{2a}} + \frac{bi}{b^2+y^{2a}};$$

ferner hat man (Ir. Nr. 216, Gl. (35)):

$$\int_0^\infty e^{-xy^a} dy = \frac{1}{a x^{\frac{1}{a}}} \Gamma\left(\frac{1}{a}\right),$$

sonach stellt sich die vorgelegte identische Gleichung nunmehr, wie folgt, dar:

$$\int_0^\infty \frac{y^a dy}{b^2+y^{2a}} + bi \int_0^\infty \frac{dy}{b^2+y^{2a}} = \frac{1}{a} \Gamma\left(\frac{1}{a}\right) \int_0^\infty x^{-\frac{1}{a}} e^{bxi} dx.$$

Ersetzt man hier die Integrationsvariable y durch eine neue z, mittelst der Gleichung $y^a = bz$, so hat man auch:

$$\int_0^\infty \frac{z^{\frac{1}{a}} dz}{1+z^2} + i \int_0^\infty \frac{z^{\frac{1}{a}-1} dz}{1+z^2} = b^{1-\frac{1}{a}} \Gamma\left(\frac{1}{a}\right) \int_0^\infty x^{-\frac{1}{a}} e^{bxi} dx,$$

wo jedes der bestimmten Integrale linkerhand nach der getroffenen Feststellung über a (Ir. Nr. 129.) einen endlichen Werth darbietet. Stellt man nun die Werthe dieser Integrale (Ir. Nr. 141, Gl. (13).) her, so hat man:

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin\left(1+\frac{1}{a}\right)\frac{\pi}{2}} + \frac{\frac{\pi}{2} i}{\sin\frac{1}{a}\frac{\pi}{2}} = b^{1-\frac{1}{a}} \Gamma\left(\frac{1}{a}\right) \int_0^\infty x^{-\frac{1}{a}} e^{bxi} dx.$$

Weil $a > 1$, ist $\frac{1}{a} < 1$; wird daher $\frac{1}{a}$ durch $1-a$ ersetzt, so hat man:

$$\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{\sin\frac{a\pi}{2}}+\frac{i}{\cos\frac{a\pi}{2}}\right\} = b^a\Gamma(1-a)\int_0^\infty x^{a-1}e^{bxi}dx,$$

oder auch die Gleichung:

$$\frac{\pi}{\sin a\pi}\cdot e^{\frac{a\pi}{2}i} = b^a\Gamma(1-a)\int_0^\infty x^{a-1}e^{bxi}dx,$$

die zufolge ihrer Ableitung bei $a < 1$ identisch besteht.

Multiplicirt man hier mit $\Gamma(a)$ und zieht hiebei die Gleichung (ε) (Ir. Nr. 221) zu, so hat man folgende Integralbestimmung:

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{bxi}dx = \frac{1}{b^a}\Gamma(a)e^{\frac{a\pi}{2}i}, \qquad (1)$$

wo a und b reelle, positiv angebbare Zahlen sind, worunter erstere, vorderhand wenigstens, kleiner denn die Einheit sein muss.

2. Von dieser Beschränkung betreffend a wird das Resultat in (1) folgendermassen befreiet. — Differenzirt man Gleichheit (1) nach b, so gelangt man auf:

$$i\int_0^\infty x^a e^{bxi}dx = -\frac{1}{b^{a+1}}a\Gamma(a)e^{\frac{a\pi}{2}i};$$

wird diese abermals nach b differenzirt, gelangt man auf:

$$i^2\int_0^\infty x^{a+1}e^{bxi}dx = \frac{1}{b^{a+2}}a(a+1)\Gamma(a)e^{\frac{a\pi}{2}i};$$

wiederholt man diese Differenziation mehrere Male hinter einander, so wird man auf folgende allgemeine Gleichheit geführt:

$$i^n\int_0^\infty e^{a+n-1}e^{bxi}dx = \frac{(-1)^n}{b^{a+n}}a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)\Gamma(a)e^{\frac{a\pi}{2}i},$$

welche beachtend Gleichheit (γ) (Ir. Nr. 220) in folgende übergeht:

$$\int_0^\infty x^{a+n-1}e^{bxi}dx = \frac{i^n}{b^{a+n}}\Gamma(a+n)e^{\frac{a\pi}{2}i}.$$

Beachtend nun die Ausgangs vorangehender Nr. festgestellte Bedeutung von a, erkennt man, dass $a+n$ jedwede positiv angebbare,

reelle Zahl vorstellt; wenn sonach $a+n$ durch a ersetzt wird, hat man nunmehr:

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{bxi} dx = \frac{i^n}{b^a} \Gamma(a) e^{\frac{a\pi}{2} i} e^{-\frac{n\pi}{2} i};$$

weiter ist:

$$e^{\frac{\pi}{2} i} = i, \text{ also } e^{-\frac{n\pi}{2} i} = i^{-n},$$

sonach hat man:

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{bxi} dx = \frac{1}{b^a} \Gamma(a) e^{\frac{a\pi}{2} i}, \qquad (2)$$

die, wie behauptet worden, von der Ausgangs vorangehender Nr. erwähnten Beschränkung, betreffend die Grösse a, frei ist, d. h. sie besteht, zufolge ihrer Deduction, für alle reelle und positiv angebbare Werthe von a und b.

Anmerkung 1. Bedenkt man, dass in (2) die imaginäre Einheit auch im negativen Sinne genommen werden darf, wie ferner, dass $(-1)^a = e^{a\pi i}$ sei; so erkennt man, dass die Gleichung (2) auch für alle reelle, negativ angebbare Werthe von b Bestand hat.

Anmerkung 2. Bedenkt man ferner die Gleichheit $i^a = e^{\frac{a\pi}{2} i}$, so erkennt man dass (2) auch Bestand hat, wenn $b = mi$ gesetzt wird, wobei m eine reelle, positiv angebbare Zahl ist. Man findet nämlich auf diesem Wege aus (2):

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-mx} dx = \frac{1}{m^a} \Gamma(a), \qquad (3)$$

welches Resultat, weil in völliger Uebereinstimmung mit Gleichheit (33) (Ir. Nr. 216), unzweifelhaft richtig ist.

Es besteht nun, dieses Alles zugegeben, die eben aufgestellte Gleichheit (3), bei Festhaltung eines reellen und positiv angebbaren Werthes für a:

1) Wenn m eine reelle und positiv angebbare Zahl ist.
2) Wenn m eine rein imaginäre Zahl ist, wo sie dann positiv wie negativ, jedoch immer angebbar, sein kann.

Dass dieselbe Zahl m in (3) auch eine gemischte imaginäre, oder eine sogenannte complexe Zahl sein kann, werden wir sammt den nöthigen Beschränkungen im Folgenden darthun.

3. Stellt man die Function e^{cx} durch die bekannte sie ersetzende, ohne Ende fortlaufende, convergente Reihe dar, so ist:

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{cx} e^{bxi} dx = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{c^r}{1.2.3...r} \int_0^\infty x^{a+r-1} e^{bxi} dx,$$

wo das Produkt $1.2.3...r$ bei $r = 0$ durch 1 zu ersetzen ist. Vollzieht man die Integration rechterhand mit Hilfe der Gleichheit (2) vorangehender Nr., so hat man beim gegenseitigen Vertauschen von b mit c folgende:

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{bx} e^{cxi} dx = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{\Gamma(a+r)}{1.2.3...r} \cdot \frac{b^r}{c^{a+r}} \cdot e^{(a+r)\frac{\pi}{2}i},$$

oder auch mit Hilfe der Gleichheit (γ) (Ir. Nr. 220.):

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{bx} c^{cxi} dx = \frac{\Gamma(a)}{c^a} e^{\frac{a\pi}{2}i} \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{a(a+1)(a+2)...(a+r-1)}{1.2.3.....r} \left(\frac{b}{c}\right)^r e^{\frac{r\pi}{2}i};$$

und da der Ausdruck $\frac{a(a+1)(a+2)...(a+r-1)}{1.2.3....r}$ den Binomialcoefficienten $(-1)^r\binom{-a}{r}$, nämlich den Coefficienten von z^r in der Entwickelung von $(1-z)^{-a}$ vorstellt, so hat man auch:

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{bx} e^{cxi} dx = \frac{\Gamma(a)}{c^a} e^{\frac{a\pi}{2}i} \sum_{r=0}^{r=\infty} \binom{-a}{r} \left(-\frac{bi}{c}\right)^r.$$

Nimmt man $\frac{b}{c} < 1$ an, dann geht der Summenausdruck in $\left(1 - \frac{b}{c}i\right)^{-a}$ über, und man hat nunmehr die Integralbestimmung:

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{bx} e^{cxi} dx = \frac{\Gamma(a)}{c^a} e^{\frac{a\pi}{2}i} \left(1 - \frac{b}{c}i\right)^{-a},$$

die, wegen $e^{\frac{a\pi}{2}i} = i^a$, in folgende:

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{bx} e^{cxi} dx = \frac{\Gamma(a)}{c^a} \left(\frac{1}{i} - \frac{b}{c}\right)^{-a},$$

oder endlich in folgende übergeht:

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{(b+ci)x} dx = \frac{\Gamma(a)}{\{-(b+ci)\}^a}. \qquad (4)$$

In diesem Ergebnisse ist a reell und positiv angebbar, b und c sind reelle, positive oder negative Zahlen, die jedoch der Beschränkung $\left(\frac{b}{c}\right)^2 < 1$ unterliegen; so dass, wenn $b = o$, nothwendig c einen angebbaren Werth haben muss.

4. Es besteht das Resultat in (4) auch wenn $\left(\frac{b}{c}\right)^2 > 1$, jedoch nur dann, wenn die reelle Constante b negativ ist. — Wird, dieses zu zeigen, der Ausdruck e^{cxi} durch die bekannte, nach Potenzen von x ohne Ende fortlaufende und convergente Reihe dargestellt, so hat man zunächst:

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{bx} e^{cxi} dx = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{c^r i^r}{1.2.3...r} \int_0^\infty x^{a+r-1} e^{bx} dx .$$

Falls nun, wie hier auch vorausgesetzt wird, b reell ist, bietet das bestimmte Integral hinter dem Summenzeichen, ganz augenfällig, nur dann einen endlichen Werth dar, wenn b eine angebbare negative Zahl ist; — sonach sehen wir uns, wenn nunmehr fortgeschritten werden soll, lediglich auf den Fall angewiesen, wenn b negativ angebbar ist. Bei dieser Annahme geht die vorhergehende Gleichheit über in:

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-bx} e^{cxi} dx = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{c^r i^r}{1.2.3...r} \int_0^\infty x^{a+r-1} e^{-bx} dx,$$

die vermöge des in (3) aufgestellten Ergebnisses in folgende übergeht:

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-bx} e^{cxi} dx = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{c^r i^r}{1.2.3...r} \cdot \frac{\Gamma(a+r)}{b^{a+r}} .$$

Aus dieser zieht man, wie bei analogem Anlasse in vorangehender Nr., folgende:

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-bx} e^{cxi} dx = \frac{\Gamma(a)}{b^a} \sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r \binom{-a}{r} \left(\frac{c}{b} i\right)^r .$$

die, wenn $\left(\frac{c}{b}\right)^2 < 1$, auf folgende führt:

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-bx} e^{cxi} dx = \frac{\Gamma(a)}{b^a} \left(1 - \frac{c}{b} i\right)^{-a},$$

oder endlich auf folgende:

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-(b-ci)x} dx = \frac{\Gamma(a)}{(b-ci)^a} . \qquad (5)$$

Hier ist a, wie in allen vorausgehenden Ergebnissen, eine reelle, positiv angebbare Zahl; c ist beliebig reell; endlich ist b reell und nicht negativ, wobei zufolge der Deduction $\left(\frac{b}{c}\right)^2 > 1$ ist.

Bedenkt man, dass das Ergebniss in (4) vorangehender Nr., bei der Annahme eines negativen Werthes für b, ein mit dem so eben gewonnenen völlig identisches Ergebniss darbieten würde; jenes aber in völliger Strenge bei $\left(\frac{b}{c}\right)^2 < 1$, und dieses mit derselben mathematischen Strenge bei $\left(\frac{b}{c}\right)^2 > 1$ erhalten worden ist: so erscheint die Eingangs vorliegender Nr. gefällte Aussage gerechtfertiget.

5. Alles bis jetzt gewonnene zusammen gestellt, ergeben sich folgende Aussagen, als völlig begründet:

„Wenn a eine reelle, positiv angebbare Zahl ist, besteht die „Bestimmungsgleichung:

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-mx} dx = \frac{\Gamma(a)}{m^a} , \qquad (I)$$

„bei folgenden Verfügungen über m:

1) „Wenn m reell und positiv angebbar ist."
2) „Wenn m eine rein imaginäre Zahl ist, die, wenn angebbar, „positiv sowohl wie negativ sein kann."
3) „Wenn m eine complexe Zahl der Form $b+ci$ ist, in fol„genden zwei Fällen:"
   a) „Wenn $\left(\frac{b}{c}\right)^2 < 1$, dann dürfen die reellen angebbaren „Zahlen b und c sowohl positiv wie negativ sein."
   b) „Wenn $\left(\frac{b}{c}\right)^2 > 1$, dann ist b keines negativen Wer„thes fähig, während c positiv wie negativ sein kann."

Schlussbemerkung.

Der Fall 3), a) verdient unter der besondern Annahme, wenn b negativ ist, eigens betrachtet zu werden.

Es geht nämlich die Gleichheit (I) in diesem Falle über in:

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{bx} e^{cxi} dx = \frac{\Gamma(a)}{\{-(b+ci)\}^a}, \qquad (A)$$

die nichts anderes als die Gleichheit (4) ist und, gleichwie diese, bei einem reellen und auch positiven b Bestand hat, falls $\left(\frac{b}{c}\right)^2 < 1$ ist.

Dass gegenwärtig c (positiv oder negativ reell) angebbar ist, folgt, falls es b ist, aus der soeben aufgestellten Ungleichheit; dass a reell und positiv angebbar ist, erwähnen wir lediglich zur Erhöhung der Deutlichkeit der nun folgenden Mittheilung.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass der Ausdruck rechterhand in (A) unter den festgestellten Prämissen einen endlichen Werth darbietet; eben so wenig kann die Richtigkeit der Deduction dieser Gleichheit (A) (immer unter den erwähnten Prämissen) beanstandet werden; — gleichwohl bietet das bestimmte Integral linkerhand vom Gleichheitszeichen in (A) manches Bedenken in Beziehung auf seinen Werth rechterhand dar, wenn man die gemeinübliche Anschauungsweise der imaginären Exponentiellen nicht verlassen will.

Fassen wir zuerst den Fall ins Auge, wo $b = 0$ ist, dann geht die Differenzialformel des betreffenden bestimmten Integrals in $x^{a-1} e^{cxi} dx$ über, welche von $x = 0$ bis zu jedem endlichen, noch so grossen positiven Werth von x beständig unendlich kleinwerdend verbleibt; nähert sich aber x dem Zustande des unendlichen Wachsens, dann wird x^{a-1}, wenn namentlich $a > 1$ ist (welche Annahme wir gegenwärtig festhalten wollen), immerwährend zunehmen, so dass, ohne Hinzutreten des exponentiellen Faktors e^{cxi}, bei diesem Zustande von x das Produkt $x^{a-1} dx$ nicht als unendlich kleinwerdend anzunehmen sein dürfte.*) Um so eher trifft das eben Gesagte ein, wenn b verschieden von Null und positiv angebbar gedacht wird: die Differenzialformel $x^{a-1} e^{bx} dx$, falls b positiv angebbar und $a > 1$ ist, wird nämlich, wenn x in den Zustand des unendlichen Wachsens tritt, nicht nur keine unendlich kleinwerdende, sondern auch keine endliche, vielmehr dem Vorausgeschickten zufolge einem unendlich grosswerdenden Werthe sich ohne Ende nähern. Beachtend aber das völlig richtige Ergebniss in (A), wird die in Rede stehende Differenzialformel

*) Dieses kann auch aus dem Umstande gefolgert werden, dass $\int_0^k x^{a-1} dx$, wenn k endlich, den Werth $\frac{1}{a} k^a$ darbietet, der aber zugleich mit k ohne Ende wächst.

$x^{a-1}e^{bx}dx$ lediglich durchs Hinzutreten des exponentiellen Faktors e^{cxi} (wo c angebbar ist) beim unendlichen Wachsen von x unendlich klein werden können. Dieses ist aber nur möglich, wenn man Lim. $e^{cxi} = 0$ erklärt, wo das Grenzzeichen Lim. auf das unendliche Wachsen von x Bezug hat; — daher stellen sich die Grenzgleichungen:

$$\text{Lim. } \cos cx = 0, \quad \text{Lim. } \sin cx = 0,$$

als durchaus zulässig in der Analysis dar, wobei allerdings von der gemeinüblichen Anschaungsweise dieser Grössen, falls nämlich das Argument ohne Ende zunimmt, wie schon oben angedeutet ward, abgesehen werden muss.

Auch der specielle Fall $a = 1$ in der obigen Gleichheit (A) führt auf das gleiche Endergebniss. — In der That zieht man aus (A):

$$\int_0^{\infty} e^{bx} e^{cxi} dx = -\frac{1}{b+ci}.$$

Durch direkte Integration findet man aber anderseits:

$$\int_0^{k} e^{bx} e^{cxi} dx = \frac{e^{bk} e^{cki}}{b+ci} - \frac{1}{b+ci}.$$

Versetzt man nun k in den Zustand des beständigen Zunehmens, so führt dieses Ergebniss, verglichen mit dem vorhergehenden, auf die Grenzgleichung:

$$\text{Lim. } \frac{e^{bk} e^{cki}}{b+ci} = 0,$$

wo das Grenzzeichen Lim. auf das beständige Wachsen von k Bezug hat.

In diesem, auch für einen reellen, positiven Werth von b bestehenden Ergebnisse ist der Faktor e^{bk} unzweifelhaft eine ohne Ende wachsende Zahl; daher ergibt sich, wie vorhin, Lim $e^{cki} = 0$, durch welche einzige Annahme die vorhergehende Grenzgleichung als bestehend erklärt werden kann.

V.

Zur cubischen Gleichung.

VORWORT.

In den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft von Zürich (2. Nov. 1850) und im 48. Bande des Crell'schen Journals führte ich die Bestimmung der Wurzelform einer algebraischen Gleichung beliebigen Grades auf die Integration linearer partiellen Differenzialgleichungen zurück. — Daselbst gelang mir lediglich die quadratische Gleichung, als besondern Fall, zu lösen; im Vorliegenden soll dieses für die cubische Gleichung durchgeführt werden.

1. Die allgemeine partielle Differenzialgleichung III. in den oben citirten Mittheilungen geht im Falle einer cubischen Gleichung in folgende gemeine der beiden Variabeln φ' und c_1 über:

$$(4+27c_1)\sqrt{c_1}\,\frac{d\varphi'}{dc_1} = -2+\frac{9}{2}\varphi'\sqrt{c_1} - 3\varphi'^2, \qquad (1)$$

falls die aufzulösende cubische Gleichung folgender Form ist:

$$\varphi'^3+\varphi'+\sqrt{c_1}=0, \qquad (2)$$

auf welche Form nach den gleichen Mittheilungen jede cubische Gleichung gebracht werden kann. — Dass diese endliche Gleichung (2) in der Stellung einer particulären Integralauflösung zur Differenzialgleichung (1) ist, überzeugt man sich sehr leicht directe, wodurch wir von der Quelle, die uns auf die simultanen Gleichungen (1 und 2) geführt hat, auch absehen können. — Ich versuchte mehrmals, immer aber vergeblich, die Gleichung (1) vollständig zu integriren, dass zugleich φ' als Function von c_1 hervorgehe; — dieses ist mir endlich nach langem Suchen in vorliegender Weise zu leisten möglich geworden.

2. Quadrirt man beide Theile der Differenzialgleichung (1), ersetzt aber hierauf die dritte und vierte Potenz von φ' mittelst der Gleichung (2) durch die erste und zweite Potenz dieser relativen Variable φ'; so gelangt man sehr bald auf

$$(4+27c_1)^2 c_1 \left(\frac{d\varphi'}{dc_1}\right)^2 = (4+27c_1)\left(1+\frac{3}{4}\varphi'^2\right),$$

die nach Unterdrückung des gemeinsamen Faktors und Ausziehung der Quadratwurzel in folgende übergeht:

$$\frac{2d\varphi'}{\sqrt{4+3\varphi'^2}} = h\frac{dc_1}{\sqrt{4c_1+27c_1^2}},$$

wo $h^2 = 1$ ist. — Zur nähern Bestimmung von h verbinde man diese mit (1) durch Elimination von $d\varphi' : dc_1$, wodurch man:

$$h\sqrt{4+3\varphi'^2}\sqrt{4+27c_1} = -4+9\varphi'\sqrt{c_1}-6\varphi'^2$$

erhält; und da Gleichung (2) bei der Annahme $\varphi' = 0$ auch $c_1 = 0$ gibt, so muss diese dasselbe geben; woraus $h\sqrt{4}\sqrt{4} = -4$, d. h. $h = -1$ gefolgert wird. Wir haben sonach statt der Differenzialgleichung (1) folgende:

$$\frac{2d\varphi'}{\sqrt{4+3\varphi'^2}} + \frac{dc_1}{\sqrt{4c_1+27c_1^2}} = 0, \qquad (3)$$

die, weil sie die Variabeln separirt enthält, vollständig leicht zu integriren ist.

Werden der grössern Gleichförmigkeit wegen zwei neue Variabeln x und y durch die Gleichungen:

$$3c_1 = x^2, \quad \varphi' = y\sqrt{3}$$

eingeführt, so geht Differenzialgleichung (3) über in:

$$\frac{dy}{\sqrt{4+9y^2}} + \frac{1}{3}\frac{dx}{\sqrt{4+9x^2}} = 0,$$

welche vollständig integrirt, auf:

$$3y+\sqrt{4+9y^2} = \frac{C}{\sqrt[3]{3x+\sqrt{4+9x^2}}}$$

führt, wo C die Integrationsconstante ist. Quadrirt man diese Gleichung, so erhält man unmittelbar:

$$4+18y^2+6y\sqrt{4+9y^2} = \frac{C^2}{\sqrt[3]{(3x+\sqrt{4+9x^2})^2}},$$

und wenn aus dieser und der unmittelbar vorhergehenden der Ausdruck $\sqrt{4+9y^2}$ eliminirt wird, ergibt sich:

$$3y = \frac{C}{\sqrt[3]{3x+\sqrt{4+9x^2}}} - \frac{\sqrt[3]{3x+\sqrt{4+9x^2}}}{C},$$

wo $\frac{C}{2}$ durch C ersetzt worden ist. Restituirt man hier für y und x ihre Werthe, und ersetzt abermals die allgemeine Constante C durch $C\sqrt{3}$, so hat man:

$$\varphi'\sqrt{3} = \frac{C}{\sqrt[3]{\sqrt{c_1}+\sqrt{\frac{4}{27}+c_1}}} - \frac{\sqrt[3]{\sqrt{c_1}+\sqrt{\frac{4}{27}+c_1}}}{C}, \qquad (4)$$

welche die vollständige Integralgleichung zu (3), wie auch zur vorgelegten (1) in der oben erwähnten, verlangten Form ist. — Es verbleibt uns sonach nur noch die Bestimmung der allgemeinen Integrationsconstante C, damit die so eben aufgestellte Bestimmung von φ' eine Wurzel der cubischen Gleichung (2) abgebe, wozu wir die folgende Schlussnummer bestimmen.

3. Aus (4) zieht man durch beiderseitige Cubirung:

$$3\sqrt{3}\cdot\varphi'^3 = \frac{4}{27}C^3\left(\sqrt{\frac{4}{27}+c_1}-\sqrt{c_1}\right) - \frac{1}{C^3}\left(\sqrt{\frac{4}{27}+c_1}+\sqrt{c_1}\right) - 3\sqrt{3}\cdot\varphi',$$

oder:

$$\varphi'^3+\varphi' = \frac{1}{4}(C\sqrt{3})^3\left(\sqrt{\frac{4}{27}+c_1}-\sqrt{c_1}\right) - \frac{1}{(C\sqrt{3})^3}\left(\sqrt{\frac{4}{27}+c_1}+\sqrt{c_1}\right);$$

und damit diese mit der vorgelegten cubischen Gleichung (2) identisch werde, beachtend noch dass C indepedent von c_1 sein muss, ergibt sich die einzige Bestimmung $(C\sqrt{3})^3 = 2$, so dass nunmehr C in Gleichung (4) jeden der drei folgenden Werthe vorstellen kann:

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}, \qquad \alpha\cdot\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}, \qquad \alpha^2\cdot\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}},$$

wo α einen der imaginären Werthe von $\sqrt[3]{1}$ vorstellt.

Wenn jeder dieser drei Werthe von C in (4) eingeführt wird, hat man folgende drei Bestimmungen für φ':

$$A+B, \qquad \alpha A+\alpha^2 B, \qquad \alpha^2 A+\alpha B, \qquad (5)$$

wo Kürze halber:

$$A = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\sqrt{c_1}+\frac{1}{2}\sqrt{c_1+\frac{4}{27}}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\sqrt{c_1}-\frac{1}{2}\sqrt{c_1+\frac{4}{27}}} \qquad (6)$$

gesetzt worden ist, welche Bestimmungen die drei Wurzeln der cubischen Gleichung in (2) sind.

MATHEMATISCHE

MITTHEILUNGEN

von

Dr J. L. RAABE,
Professor.

ZWEITES HEFT.

ZÜRICH,
VERLAG VON MEYER & ZELLER.
1858.

Druck von E. Kiesling.

Gleich beim Beginn des Druckes vorliegenden Heftes überfiel mich eine schwere Krankheit, an der ich zum Theil noch darniederliege; dadurch sind mir die Korrektur dieses Heftes, sowie auch einige nothwendige Redaktionen zur physischen Unmöglichkeit geworden. Diesem unangenehmen und mühesamen, wenn auch nothwendigen Geschäfte unterzog sich mein ehemaliger Schüler, Herr Hug, Privatdozent an der hiesigen Universität und am Polytechnikum (an letzterer Anstalt versieht derselbe vikariatsweise meine Stelle mit sehr gutem Erfolge für Zuhörer und Schüler), wofür ich ihm annit meinen herzlichen Dank öffentlich ausspreche.

Zürich, Ende Februar 1858.

Der Verfasser.

Durch eine Verwechslung blieben im ersten Bogen folgende sinnstörende Druckfehler stehen:

Pag. 85, Zeile 10 von oben setze den Faktor vor das zweite Integral $= i\frac{a^3c}{3b^3}$.

„ 87, „ 5 von unten lies $\beta = \frac{c^2}{b^2} - 1$.

„ 89, „ 7 „ „ „ $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ statt $\frac{x}{\sqrt{1-y_2}}$.

„ 90, „ 1 „ „ „ zu unterdrücken die Wiederholung „von Werth“.

„ 93, „ 3 „ „ „ „aus denen“ statt „aus dem“.

„ 94, „ 10 und 15 von unten setze $d\alpha$ statt dx.

„ 95, „ 3 von unten setze x^2 statt x^3 im Nenner.

VI.

Das Ueberschreiten reeller Integrationsgrenzen ins Imaginäre bei der Werthung bestimmter Doppelintegrale geometrischer Bedeutung.

VORWORT.

Gleichwie Pr. Dirichlet bei der Werthung eines höchst schwierigen dreifachen Integrals die betreffenden endlichen Integrationsgrenzen überschreitet, solche ins Unendliche erweitert und diese Grenzerweiterung durchs Einführen eines Factors wieder aufhebt und so zum Schlusse ein höchst elegantes Endresultat herbeiführt; ebenso wird man bei manchem Doppelintegrale geometrischer Bedeutung ebenfalls durch ein Ueberschreiten der vorliegenden reellen Integrationsgrenzen, jedoch ins Imaginäre, den Akt des Integrirens namhaft erleichtern und vereinfachen. Werden dann nach vollbrachter Integration die sich ergebenden rein imaginären Bestandtheile, welche der Aufgabe fremd sind, einfach unterdrückt, so bieten die zurückbleibenden reellen Bestandtheile die verlangte Werthung des Doppelintegrals dar.

Diesen Gedanken bringe ich in der vorliegenden Mittheilung bei Kubirung und Planirung eines endlichen Theiles sowohl wie eines geschlossenen, ganzen dreiachsigen Ellipsoids zur Anwendung. Der endliche Theil der Kubirung umfasst eine zweirechtwinklige dreiseitige Pyramide, deren Scheitel im Centrum des erwähnten Ellipsoids, deren eine Seite einer der Hauptschnitte des Ellipsoids ist, auf welchen die beiden andern Seiten (der Pyramide) senkrecht stehen, deren Basis endlich das von den soeben vorgeführten drei Ebenen auf der Ellipsoidenoberfläche erzeugte zweirechtwinklige Ellipsoiden-Dreieck ist. — Die Planirung dieses Dreiecks endlich wird den endlichen Theil der obenerwähnten Planirungsfrage beschlagen.

Der Schluss der vorliegenden Mittheilung enthält eine beachtenswerthe Bemerkung zu einem grossen und wichtigen Abschnitte des

zweiten Bandes meiner Differenzial- und Integralrechnung, der bei der Lösung der vorhin erwähnten geometrischen Gegenstände in Anspruch genommen wird.

A.

Allgemeine Inhaltsbestimmung eines dreiachsigen Ellipsoids und, im Besondern, einer derartigen zweirechtwinkligen dreiseitigen Pyramide.

1. Wenn die Oberfläche eines dreiachsigen Ellipsoids durch die Gleichung gegeben ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (1)$$

wo a, b, c die Hälften der drei Hauptachsen des Ellipsoids sind, so stellt, wie bekannt, der Differenzialausdruck zweiten Grades

$$c\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}} \cdot dy\,dx \qquad (2)$$

das Differenzial oder ein Element des Inhaltes des ganzen Ellipsoids in folgender Deutung dar.

Auf der Coordinatenebene der x, y in der Richtung der positiven Seite der z Achse denken wir uns ein rechtwinkliges, vierseitiges Prisma aufgerichtet; dieses sei einerseits von der Ebene der x y im unendlich klein werdenden Rechtecke dx dy, entgegengesetzterseits aber von der durch (1) dargestellten Ellipsoidenfläche begrenzt: Den Inhalt dieses so krummflächig abgestutzten Prisma's stellt der Differenzialausdruck in (2) vor.

Fasst man irgend eine Anzahl aneinander stossender Prismen dieser Art durch Summation zusammen, so hat man, je nach Beschaffenheit der Begrenzungslinie sämmtlicher durch dx dy allgemein angedeuteter Rechtecke das Volumen oder den Inhalt des ganzen oder eines endlichen Theiles des in Rede stehenden Ellipsoids, welches analytisch, wie bekannt, durch

$$c\int\int\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}} \cdot dy\,dx \qquad (3)$$

angedeutet und, je nach Beschaffenheit der Begrenzungslinie, hieraus auch bestimmt wird. Es kann diese Begrenzungslinie ein Kreis, eine Ellipse oder auch eine geschlossene ganz beliebige gemischtlinige Figur sein, sie darf jedoch den Umfang der Ellipse nicht überschreiten, welche den in der Coordinatenebene der x, y fallenden Hauptschnitt

des Ellipsoids bildet, falls man nicht auch imaginäre Prismen oben erwähnter Art mit summiren will (was wir allerdings, wie im Vorworte angedeutet ward, thun werden), in welchem Falle das Doppelintegral in (3) auch imaginäre Bestandtheile mitführen wird.

2. Zu dem uns gesetzten Probleme im Besondern nunmehr übergehend, sei die Ellipsoiden-Pyramide, mit der wir uns zunächst befassen wollen, von folgender Beschaffenheit.

Die eine begrenzende Seite dieser Pyramide sei Coordinatenebene der x, y, die andere die Coordinatenebene z, x und die dritte eine zu dieser unter dem Winkel λ geneigte und zu jener senkrecht stehende Ebene, die durch die Achse der z geht; endlich sei das zweirechtwinklige Dreieck, das diese drei Ebenen mit der Ellipsoidenfläche bilden, die Basis besagter Pyramide. Hiezu bemerke ich noch, dass die dritte Seite der Pyramide, deren Ebene auf Ebene x,y senkrecht steht und den Winkel λ gegen Ebene z, x eingeht, analytisch durch ihren Schnitt mit der Ebene x,y, also durch die Gleichung:

$$y = \mu x \qquad (4)$$

fixirt ist, wo $\mu = \text{tang } \lambda$ ist und wobei λ innerhalb o und $\frac{\pi}{2}$ festgestellt sei.

Dieses festgestellt, ist die Begrenzung der zu summirenden Differenzial-Prismen, aus denen die gegenwärtig in Rede stehende Pyramide zusammengesetzt ist, eine geschlossene gemischtlinige Figur, die aus folgenden Linien zusammengesetzt ist: 1) Aus dem positiven Theil der x Achse, der der Halbachse a gleich ist. 2) Aus einem Theil der Geraden (4), welcher vom Anfangspunkte der Coordinaten (Scheitel der Pyramide) und einem Peripheriepunkte der Ellipse $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ begrenzt ist. Endlich 3) aus dem Bogenstücke derselben Ellipse, das von den unmittelbar vorher festgestellten zwei Geraden begrenzt ist.

Wäre eine analytische Darstellung (durch eine Gleichung) dieser soeben beschriebenen gemischtlinigen Figur leicht erhältlich, so würde man in bekannter Weise aus derselben die betreffenden Integrationsgrenzen zu dem Doppelintegrale in (3) folgern und hierauf zur Vollziehung der Integrationen schreiten. Dem ist jedoch nicht so, was namentlich die einfache analytische Darstellungsweise der gemischtlinigen Figur betrifft, daher wir bei der Summation der Prismen, von denen in vorangehender Nr. die Rede war, oder besser bei der Vollziehung des Doppelintegrals in (3) die reellen Integrationsgrenzen auch

ohne sie analytisch festgestellt zu haben, thatsächlich überschreiten werden, dafür aber, wie schon im Vorworte angedeutet ward und der weitere Verfolg auch einleuchtend machen wird, sämmtliche imaginären Bestandtheile im Endergebnisse, als dem fraglichen Gegenstande fremd, einfach unterdrücken werden.

3. Eine Ueberschreitung der Integrationsgrenzen, wodurch die hinter dem Integralzeichen (3) enthaltene Differenzialformel aus dem reellen in den imaginären Zustand übergeht, tritt offenbar ein, wenn die Integration zuerst nach y, von $y = o$ bis $y = \mu x$ und hierauf nach x, von $x = o$ bis $x = a$ vollbracht wird. Denn schon bei Werthen von x, die noch kleiner wie a sind, kann es vermöge Gleichung (4) Werthe für y geben, die Punkten angehören, so ausserhalb die Ellipse fallen, welche in der Ebene der x,y einen der Hauptschnitte des Ellipsoids bildet; dadurch werden von den zu summirenden Differenzial-Prismen auch unendlich viele mitsummirt, die nach der Seite der positiven z keine reale Begrenzung haben und überdies noch ausserhalb des in Rede stehenden Ellipsoids sind. Es umfassen sonach die oben beschriebenen Grenzen des Doppelintegrals (3) einen Theil wirklicher oder reeller, zugleich aber auch einen andern Theil bloss gedachter, dem Ellipsoide völlig fremde und nach einer Seite unbegrenzte Differenzial-Prismen, welchen letztern Antheil die Analysis nur durch das Imaginäre anzudeuten vermag.

Alles hier Mitgetheilte beachtend, haben wir folgendes bestimmte Doppelintegral:

$$c\int_0^a\int_0^{\mu x}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}}\,dy\,dx$$

zu werthen; in dem sich herausstellenden Ergebnisse, das eine complexe Zahl sein muss, wird dann der reelle Antheil die Summe aller reellen Differenzial-Prismen darbieten, — so dass derselbe die Lösung des gegenwärtig in Rede stehenden Problems ganz umfasst.

Zur Integration nunmehr übergehend, ersetzen wir die Integrationsvariable y zuerst durch xy', wo y' die neue Integrationsvariable ist, so geht obiger Integralausdruck, wenn Kürze halber durch u vorgestellt, über in

$$u = c\int_0^a\int_0^{\mu}\sqrt{1-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}\right)x^2}\,dy'\cdot xdx,$$

wo gegenwärtig wegen des Constantseins sämmtlicher Integrations-

grenzen die Ordnungsfolge der beiden Integrationen auch gegenseitig vertauscht werden darf. Geschieht dieses und ersetzt man noch x^2 durch x, wie y' durch y, so hat man auch:

$$u = \frac{c}{2}\int_0^{\mu}\int_0^{a^2} \sqrt{1-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)x}\cdot dx\,dy\cdot$$

Die zu vollziehende Integration nach x gehört unstreitig zu den einfachern Integrationsoperationen; sie führt nämlich auf eine algebraische Funktion, und man findet

$$\int \sqrt{1-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)x}\,dx = -\frac{2}{3}\,\frac{\left\{1-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)x\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}} + \text{Const.};$$

somit erhält man:

$$u = \frac{c}{3}\int_0^{\mu}\frac{dy}{\frac{1}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}} + i\,\frac{ac}{3b}\int_0^{\mu}\frac{y^3\,dy}{\frac{1}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}},$$

wo i die imaginäre Einheit ist.

Es verbleibt sonach dem Vorausgeschickten zufolge das erste Glied rechter Hand vom Gleichheitszeichen, als wirklicher Werth der hier in Rede stehenden Ellipsoiden-Pyramide, der, wenn durch E_p vorgestellt, durch die Gleichung:

$$E_p = \frac{c}{3}\int_0^{\text{tang}\,\lambda}\frac{dy}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}y^2}$$

gegeben ist, wo, wie bereits in vorhergehender Nro angedeutet worden,

$$\text{tang}\,\lambda = \mu$$

gesetzt worden ist. Vollzieht man die Integration in der Bestimmungsgleichung von E_p, so hat man

$$E_p = \frac{1}{3}\,abc\,\text{arctang}\left(\frac{a}{b}\,\text{tang}\,\lambda\right) \qquad \text{I.}$$

Stellt man durch E_p' das Volumen einer analogen Pyramide, die dem Winkel λ' entspricht, so hat man auch:

$$E_p' = \frac{1}{3}\,abc\,\text{arctang}\left(\frac{a}{b}\,\text{tang}\,\lambda'\right) \qquad \text{(I')}$$

Wird nun $\lambda' > \lambda$ angenommen, jedoch gleichwie λ innerhalb der Grenzen o und $\frac{\pi}{2}$ festgehalten, so bietet der Unterschied $E_p' - E_p$ den

Volumenausdruck irgend einer zweirechtwinkligen Ellipsoiden-Pyramide dar, wo nämlich keine ihrer Seitenwände, die auf der Coordinatenebene der x, y senkrecht stehen, ein Hauptschnitt des Ellipsoids sein muss.

Wird λ oder λ' gleich $\frac{\pi}{2}$ angenommen, so stellt das betreffende E_p oder E'_p den achten Theil des ganzen Inhaltes des in Rede stehenden Ellipsoids dar. Stellt man sonach durch V den ganzen Inhalt vor, so hat man:

$$V = \frac{8}{3} abc \frac{\pi}{2} = \frac{4}{3} abc \pi \qquad (6)$$

welcher Werth in den bekannten Volumenausdruck einer Kugel vom Halbmesser a übergeht, wenn in demselben $c = b = a$ angenommen wird.

B.

Allgemeine Flächenbestimmung eines dreiachsigen Ellipsoids und, im Besondern, eines derartigen zweirechtwinkligen Dreiecks.

4. Ein viel schwierigeres Problem, denn die Inhalts- oder Volumenbestimmung ist jedesmal die Flächenbestimmung einer krummen Oberfläche. Hiezu wählen wir zunächst das zweirechtwinklige Ellipsoidendreieck, welches im vorhergehenden Abschnitte die Basis der daselbst behandelten Pyramide abgibt, und worüber wir uns dort zur Genüge ausgesprochen haben.

Auch bei der Lösung dieses Problems werden wir, wie auch schon angezeigt, aus der Ueberschreitung der reellen Integrationsgrenzen ins Imaginäre erspriesslichen Vortheil ziehen; wir werden jedoch in Betracht der grössern Ausführlichkeit, deren wir uns im vorhergehenden Abschnitte beflissen, im vorliegenden hierüber uns etwas kürzer fassen können.

Bekanntlich wird das Flächenelement oder Flächendifferenzial irgend einer krummen Oberfläche, dessen orthogonale Projection in die Coordinatenebene der x, y durch dx dy gegeben ist, durch folgenden Differenzialausdruck

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$$

dargestellt, wo man die gemein übliche Bezeichnungsweise der partiellen Differenzialquotienten erster Ordnung beibehalten hat, nämlich wo

$$p = \frac{dz}{dx} \text{ und } q = \frac{dz}{dy}$$

aus der gegebenen Gleichung zwischen x, y, z der krummen Ober-

fläche als Funktionen von x und y herzustellen und in den Differenzialausdruck zweiten Grades einzusetzen sind.

Unterlegen wir sonach die durch Gleichung (1) der Nro 1 vorgelegte Ellipsoidenfläche, so nimmt der eben erwähnte Differenzialausdruck zweiten Grades folgende Form an:

$$\frac{\sqrt{1+\left(\frac{c^2}{a^2}-1\right)\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{c^2}{b^2}-1\right)\frac{y^2}{b^2}}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$$

welcher das oben angedeutete unendlich kleinwerdende Flächenelement des dreiachsigen Ellipsoids in (1) vorstellt.

Man hat also, ähnlich wie in vorhergehender Nro., zur Flächenbestimmung des zweirechtwinkligen Ellipsoiden-Dreiecks zunächst die Werthung des Doppelintegrals:

$$\int_0^a\int_0^{\mu x}\frac{\sqrt{1+\left(\frac{c^2}{a^2}-1\right)\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{c^2}{b^2}-1\right)\frac{y^2}{b^2}}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\,dx$$

gleichwie im Problem der Volumenbestimmung zu behandeln, d. h. die hier angezeigte zweifache Integration ist zu vollziehen, und im Verlaufe des Calculs sind jene Bestandtheile, welche unzweideutig rein imaginärer Beschaffenheit sind, zu unterdrücken.

Hiezu nun übergehend, ersetzen wir in diesem Doppelintegrale vorerst x durch ax, y durch by und bezeichnen dessen Werth Kürze halber durch U, so gelangen wir auf:

$$U = ab\int_0^1\int_0^{\frac{a}{b}\mu x}\frac{\sqrt{1+\alpha x^2+\beta y^2}}{1-x^2-y^2}\,dy\,dx,$$

wo gleichfalls Kürze halber

$$\alpha = \frac{c^2}{a^2}-1,\ \beta = \frac{c^2}{a^2}-1 \qquad (7)$$

gesetzt worden ist. Wird ferner in dem zuletzt aufgestellten Doppelintegrale $y = xy'$ gesetzt, wo y' die neue Integrationsvariable ist, so hat man auch:

$$U = ab\int_0^1\int_0^{\frac{a}{b}\mu}\frac{\sqrt{1+(\alpha+\beta y'^2)\,x^2}}{1-(1+y'^2)\,x^2}\,dy'\cdot x\,dx.$$

Schreiben wir wiederum y' statt y und ersetzen x^2 durch x und bedenken, dass wir, wegen der constanten Integrationsgrenzen, zur gegenseitigen Vertauschung der Ordnungsfolge beider partieller Integrationen berechtiget sind: so haben wir uns schliesslich mit der Vollziehung des Doppelintegrals in folgender Gleichung zu befassen:

$$U = \frac{1}{2} ab \int_0^{\frac{a}{b}\mu} \int_0^1 \sqrt{\frac{1 + (\alpha + \beta y^2)\, x}{1 - (1 + y^2)\, x}}\, dx\, dy,$$

wozu wir ausschliesslich folgende Nro bestimmen.

5. Fassen wir zunächst das bestimmte Integral:

$$u = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 + (\alpha + \beta y^2)\, x}{1 - (1 + y^2)\, x}}\, dx, \qquad (8)$$

zu dem Zwecke ins Auge, um den imaginären Theil seines Werthes von dem zugehörigen reellen Antheil zu sondern, so wird beim einfachen Anblicke dieses Integrals jener Fall als der leichter zu behandelnde erkannt, bei welchem α und β zugleich positiv sind; dieses tritt ein, wenn beachtend die Gleichungen in (7) unter den drei ungleichen Hauptachsen des Ellipsoids jene, so mit der Coordinatenachse der z zusammenfällt, die numerisch grösste ist, d. h. wenn man

$$a < c \text{ und } b < c \qquad (9)$$

hat. Setzen wir diese Doppelannahme, ohne uns noch über das gegenseitige Verhalten der beiden andern Achsen a und b auszusprechen, vorläufig fest, so leuchtet augenfällig ein, dass das bestimmte Integral in (8), falls man es durch eine aus der Integralrechnung bekannte Summenformel interpretirt, nur für innerhalb der Grenzen o und $\frac{1}{1 + y^2}$ fallende Werthe von x (die nach den aufgestellten Integrationsgrenzen nur positiv sein können) reelle Summanden darbieten wird. Unterdrückt man sonach, dem in vorliegender Mittheilung geltenden Verfahren gemäss, die rein imaginären Summanden des erwähnten bestimmten Integrals in (8), und stellt den übrig bleibenden rellen Antheil desselben durch u_r dar, so hat man statt der Gleichung (8) folgende:

$$u_r = \int_0^{\frac{1}{1+y^2}} \sqrt{\frac{1 + (\alpha + \beta y^2)\, x}{1 - (1 + y^2)\, x}}\, dx,$$

die einerlei mit folgender ist:

$$u_r = \frac{1}{1 + y^2} \int_0^1 \sqrt{\frac{1 + y^2 + (\alpha + \beta y^2)\, x}{(1 + y^2)(1 - x)}}\, dx.$$

Sehr schnell wird diese Integration vollzogen, wenn x durch eine neue Variable x' folgender Gleichung gemäss ersetzt wird:

$$\frac{(1+y^2)(1-x)}{1+y^2+(\alpha+\beta y^2)x} = x'^2,$$

wo man auf folgende Bestimmungsgleichung von u_r gelangt:

$$u_r = 2(1+y^2+\alpha+\beta y^2)\int_0^1 \frac{dx}{\{1+y^2+(\alpha+\beta y^2)x^2\}^2},$$

in welcher x' durch x wieder ersetzt worden ist.

Zieht man nun eine der sogenannten Reductionsgleichungen [Ir. Nro 56, Gl. (62)] zu, so gelangt man auf:

$$u_r = \frac{1}{1+y^2} + \frac{1+y^2+\alpha+\beta y^2}{1+y^2}\int_0^1 \frac{dx}{1+y^2+(\alpha+\beta y^2)x^2},$$

und wenn das bestimmte Integral rechterhand vollzogen wird, hat man

$$u_r = \frac{1}{1+y^2} + \left(1+\frac{\alpha+\beta y^2}{1+y^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1+y^2}\sqrt{\alpha+\beta y^2}}\operatorname{arctang}\left(\sqrt{\frac{\alpha+\beta y^2}{1+y^2}}\right).$$

Stellt man den reellen Antheil des Ausgangs vorangehender Nro durch U dargestellten Doppelintegral nunmehr durch U_r vor, so hat man:

$$U_r = \frac{1}{2}ab\operatorname{arctang}\left(\frac{a}{b}\mu\right) +$$

$$+\frac{1}{2}ab\int_0^{\frac{a}{b}\mu}\operatorname{arctang}\left(\sqrt{\frac{\alpha+\beta y^2}{1+y^2}}\right)\left(1+\frac{\alpha+\beta y^2}{1+y^2}\right)\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}\sqrt{\alpha+\beta y^2}};$$

wird hier noch die Integrationsvariable y durch $\frac{x}{\sqrt{1-y_2}}$ ersetzt, wo x die neue Variable ist, so hat man auch:

$$U_r = \frac{1}{2}ab\operatorname{arctang}\left(\frac{a}{b}\mu\right) +$$

$$+\frac{ab(1+\alpha)}{2\sqrt{\alpha}}\int_0^{\frac{\frac{a}{b}\mu}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\mu\right)^2}}}\operatorname{arctang}\left(\sqrt{\alpha}\sqrt{1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha}x^2}\right)\frac{1-\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha}x^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha}x^2}}dx. \quad (II)$$

Behufs Erzielung einer grössern Aehnlichkeit und leichtern Anknüpfung dieses Ergebnisses mit den in der Theorie der elliptischen Integrale vorkommenden Formen setze ich $\frac{\alpha-\beta}{\alpha} < 1$ und positiv

fest, welches, beachtend die Gleichungen (7), wie die Ungleichheiten (9), nur dann eintreffen kann, wenn die drei Hauptachsen des Ellipsoids folgenden Ungleichheiten genügen:

$$a < b < c, \qquad (9')$$

die jedoch folgende Gleichheiten nicht ausschliessen:

$$c = b + \omega,\ b = a + \omega,\ a = b = c - \omega, \qquad (10)$$

wo ω reell, positiv und eine allgemeine unendlich kleinwerdende Zahlengrösse repräsentirt.

Anmerkung: Die Grösse μ in Gleichung (II) ist wegen $\mu = \text{tang}\ \lambda$, aller positiven reellen Werthe fähig. Wenn daher μ' statt μ daselbst gesetzt wird, und das hieraus hervorgehende Ergebniss für U_r durch U_r' angedeutet wird; — so stellt $U_r' - U_r$ (falls nämlich $\mu' > \mu$) den Flächengehalt eines zweirechtwinkligen Ellipsoiden-Dreiecks vor, dessen Basis im Hauptschnitte der Ebene x,y innerhalb der positiven Theile der Coordinatenachse der x und der y zu liegen kommt, dessen Scheitel im Endpunkte der grössten der drei Hauptachsen des Ellipsoids liegt, und wo endlich der gegenseitige Winkel der durch diesen Scheitel gehenden zwei Seiten des Dreiecks gleich $\lambda' - \lambda$ ist, wo man $\mu' = \text{tang}\ \lambda'$ und $\mu = \text{tang}\ \lambda$ hat.

6. Ehe wir das allgemeine Ergebniss in (II) verlassen, um aus demselben den Flächengehalt des ganzen Ellipsoids zu folgern, ziehen wir aus demselben vorerst noch die Flächengehalte analoger zweirechtwinkliger Dreiecke zu dem in der Anmerkung vorhergehender Nro besprochenen, im Falle eines Rotationsellipsoids sowohl, wie in dem der Kugel.

Wird im allgemeinen Ergebnisse (II) $b = a + \omega$, oder einfacher $b = a$ angenommen, woraus zunächst $\beta = \alpha$ gefolgert wird; so hat man, wenn bei dieser Specialisirung U_r durch R_r ersetzt wird, die Bestimmung:

$$R_r = \frac{1}{2} a^2 \cdot \text{arctang}\,\mu + \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{1+\alpha}{\sqrt{\alpha}} \text{arctang}\,(\sqrt{\alpha}) \cdot \int_0^{\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Vollzieht man die Integration und ersetzt μ durch tang λ, so hat man

$$R_r = \frac{1}{2} a^2 \lambda \left\{ 1 + \frac{1+\alpha}{\sqrt{\alpha}} \text{arctang}\,(\sqrt{\alpha}) \right\}. \qquad (a)$$

Stellt R_r' den Werth von Werth von R_r vor, wenn λ durch λ'

ersetzt wird, wo $\lambda' > \lambda$, beide aber, wie bis jetzt geschah, inner den Grenzen o und $\frac{\pi}{2}$ gebannt sind; — so stellt $R' - R$ den Flächengehalt des am Eingange im Auge gehabten zweirechtwinkligen Dreiecks auf einem länglichen Rotationsellipsoid dar.

Wird endlich in der Gleichung (a) auch noch $c = a$ angenommen, wodurch $\alpha = o$ erkannt wird, und ersetzt man nun noch R_r durch K_r, so hat man

$$K_r = a^2 \lambda. \qquad (b)$$

welches Ergebniss die bekannte elementare Regel für die Oberfläche eines zweirechtwinkligen Kugeldreiecks vorstellt, welche Regel durch den sogenannten „Sphärischen Excess" (gegenwärtig gleich λ) sich ausspricht.

Anmerkung. Die Ergebnisse dieser und der vorangehenden Nro betreffen den Fall, wenn α und β aus den Gleichungen (7) beide positiv sind. In ähnlicher Weise lassen sich die nöthigen Rechnungen durchführen, wenn das Gegentheil dieser Annahme Bestand hat. Man gelangt alsdann statt auf die Kreisfunction arctang auf die logarithmische log., mit deren Durchführung und Angabe jedoch wir uns gegenwärtig nicht befassen, da sie ohne Einfluss auf die Bestimmung der ganzen Ellipsoidenfläche ist, wozu wir sofort übergehen.

7. Zur Darstellung der ganzen Ellipsoidenfläche nunmehr übergehend, setzen wir in dem durch (II) vorgestellten allgemeinen Ergebnisse $\mu = \infty$ (oder $\lambda = \frac{\pi}{2}$), womit der Flächengehalt einer der acht symmetrischen Bestandtheile der Gesammtoberfläche des Ellipsoids gewonnen wird. Wenn also durch O die ganze Oberfläche des dreiachsigen Ellipsoids vorgestellt wird, dann geht in der Bestimmungsgleichung (II) zweitvorhergehender Nro bei der Annahme $\mu = \infty$ der Ausdruck linkerhand, oder U_r in $\frac{1}{8}$ O über und man hat:

$$\frac{1}{8}O = \frac{1}{4}ab\pi + \frac{1}{2}ab\frac{1+\alpha}{\sqrt{\alpha}}\int_0^1 \operatorname{arctang}\left(\sqrt{\alpha}\sqrt{1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha}}\right)\frac{1-\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha}x^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha}x^2}}dx,$$

die mit Hilfe einer im zweiten Bande meiner Integral-Rechnung [Itr. Nro 424, Gleichung (31)] mitgetheilten Reductionsgleichung in folgende übergeht:

$$0 = 2ab\pi \left\{ \sqrt{\frac{1+\alpha}{1+\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha}x^2}} + \sqrt{\alpha} \int_{\frac{1}{\sqrt{1+\beta}}}^{1} \frac{\sqrt{1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha}x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \right\};$$

ersetzt man hier noch α und β durch ihre Werthe aus den Gleichungen (7), so hat man endlich:

$$0 = 2b^2\pi + \frac{2a^2b\pi}{\sqrt{c^2-a^2}} \int_0^{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{1-\frac{a^2}{b^2}}{1-\frac{a^2}{c^2}}x^2}} +$$

$$+ 2b\sqrt{c^2-a^2} \cdot \pi \int_{\frac{b}{c}}^{1} \frac{\sqrt{1-\frac{1-\frac{a^2}{b^2}}{1-\frac{a^2}{c^2}}x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \qquad \text{(III)}$$

welches die verlangte Oberfläche eines dreiachsigen Ellipsoids vorstellt, wo die Halbachsen a, b, c die Ungleichheiten

$$a < b < c$$

eingehen.

Um auch die Oberflächen der beiden Arten von Rotationsellipsoiden (des länglichen und des abgeplatteten) zu haben, so gewinnt man die des länglichen aus Gleichung (a) vorangehender Nro bei der Annahme $\lambda = \frac{\pi}{2}$. Bei dieser Annahme nämlich repräsentirt R_r den achten Theil des ganzen Ellipsoids, oder $\frac{1}{8}E$, falls E die ganze Oberfläche des länglichen Rotationsellipsoids vorstellt; sonach hat man, wenn auch α den Gleichungen in (7) gemäss restituirt wird:

$$E = 2a^2\pi + \frac{2ac^2\pi}{\sqrt{c^2-a^2}} \operatorname{arctang}\left(\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}\right). \qquad \text{(o)}$$

wo $c > a$ ist, und 2c die Drehungsachse des Ellipsoids bildet.

Betreffend das abgeplattete Ellipsoid hat man im allgemeinen Ergebnisse (III) $b = c$ anzunehmen. Thut man dieses und stellt durch ⊟ die ganze Oberfläche dieses Ellipsoids vor, so hat man zunächst:

$$\text{⊠} = 2c^2\pi + \frac{2a^2c\pi}{\sqrt{c^2-a^2}} \int_0^{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}} \frac{dx}{1-x^2}$$

und nach Vollziehung der Integration:

$$\text{⊠} = 2c^2\pi + \frac{a^2c\pi}{\sqrt{c^2-a^2}} \log \frac{c+\sqrt{c^2-a^2}}{c-\sqrt{c^2-a^2}} \qquad (c')$$

wo $a < c$, und 2a die Drehungsachse des Ellipsoids bildet.

Anmerkung. Vertauscht man in jeder der Gleichungen (c und c') gegenseitig a mit c, so geht, mit Zuziehung der Gleichheiten:

$$\text{arctang}\, x = \frac{1}{2i} \log \frac{1+xi}{1-xi},$$

$$\log \frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{i} \text{arctang}\, xi,$$

wo i die imaginäre Einheit repräsentirt, das eine Ergebniss in das andere über und umgekehrt.

C.

Bemerkung zum zweiten Bande meiner Integralrechnung VIII, §. III, Nro 415—424.

8. Bei der Gewinnung des Ergebnisses in (III) vorangehender Nro legte ich auch ein daselbst citirtes Ergebniss aus dem zweiten Bande meiner Differenzial- und Integralrechnung unter, das von meinen Fachgenossen der rigorosen Schule nicht ohne Anfechtung wird zugegeben werden. Ich habe hier den in der Ueberschrift bezeichneten §. III besagten Bandes im Auge, wo manches bis anhin nicht bekannte und, wie ich glaube, beachtenswerthe Resultat enthalten ist, wovon aber der bei weitem grössere Theil auf die vielfach angefochtenen Gleichungen: $\int_0^\infty \cos x\, dx = o$, $\int_0^\infty \sin x\, dx = 1$, oder auf die ihnen gleichbedeutenden Lim. $\cos x = o$, Lim. $\sin x = o$ beruhen, wo das Grenzzeichen Lim. auf das unendliche Zunehmen von x Bezug hat. Aus dem citirten §. III meines Werkes habe ich gegenwärtig ganz besonders die in Nro 420 entwickelten Gleichungen und Gleichheiten (I, II und III) im Auge, aus dem jenes Ergebniss gefolgert worden ist, dessen Eingangs Erwähnung geschah, um die Gleichung (III) vorangehender Nro zu erhalten.

Ohne gegenwärtig über die Zulässigkeit der angefochtenen zwei bestimmten Integrale, wie der coordinirten Grenzgleichungen in eine Diskussion einzutreten, was, im Vorbeigehen bemerkt, auch schon im ersten Hefte dieser Mittheilungen geschah, bestimme ich noch die folgende Schlussnummer vorliegender Mittheilung dazu, die oben citirten Gleichungen wie Gleichheiten (I, II und III) aus dem zweiten Bande meines Werkes in einer Weise nachzuweisen, wobei die erwähnten angefochtenen Gleichungen in keinerlei Betracht kommen.

9. Schliessen wir jene Fälle bei unsern Betrachtungen aus, wo ein bestimmtes einfaches Integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx\,,$$

oder ein bestimmtes Doppelintegral:

$$\int_a^B \int_b^A f(x,y)\,dx\,dy$$

ein Gegenstand analytischer Betrachtung zu sein aufhört (Ir. Nr. 105 und 106, 414 und 415); so besteht folgende Gleichheit:

$$\int_0^\infty \int_a^b \frac{z\varphi(z)}{\alpha^2+z^2}\cos x\alpha\,dz\,dx = \int_a^b \left(\int_0^\infty \frac{\cos x\alpha}{z^2+\alpha^2}\,dx\right) z\varphi(z)\,dz$$

in voller mathematischer Strenge, wo $\varphi(z)$ eine Funktion von z vorstellt.

Nun hat man für jeden reellen nur nicht negativen Werth von x [Ir. Nro 164, Gl. (75)] die Bestimmung:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\,\alpha}{z^2+\alpha^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{-xz}}{z}\,,$$

daher nimmt die unterlegte Gleichheit folgende Eorm an:

$$\int_0^\infty \int_a^b \frac{z\,\varphi(z)}{\alpha^2+z^2}\cos x\,\alpha\,dz\,d\alpha = \frac{\pi}{2}\int_a^b \varphi(z)\,e^{-xz}\,dz\,, \qquad (1)$$

die ebenfalls für alle reellen, nur nicht negativen Werthe von x Bestand hat.

Differenzirt man diese nach x, so erhält man:

$$\int_0^\infty \int_a^b \frac{\alpha z\,\varphi(z)}{\alpha^2+z^2}\sin x\alpha\,dz\,d\alpha = \frac{\pi}{2}\int_a^b z\,\varphi(z)\,e^{-xz}\,dz\,,$$

die jedoch für $x=o$ nicht mehr Bestand hat, da der Ausdruck linkerhand vom Gleichheitszeichen bei $x=o$ oder bei $x=\omega$, wo ω unendlich kleinwerdend ist, keiner bestimmten Deutung mehr fähig ist; so-

nach besteht das zuletzt dargestellte Ergebniss für alle positiv angebbaren Werthe von x.

Da wir über die Beschaffenheit der Funktion $\varphi(z)$ ausser der Eingangs dieser Nro gefällten allgemeinen Bemerkung keinerlei Feststellung bis jetzt getroffen haben, so sind wir auch $z\,\varphi(z)$ durch $\varphi(z)$ zu ersetzen berechtiget, — und wir haben sonach statt des zuletzt gewonnenen Ergebnisses auch folgendes:

$$\int_0^\infty \int_a^b \frac{\alpha\,\varphi(z)}{\alpha^2+z^2} \sin x\alpha\, dz\, d\alpha = \frac{\pi}{2}\int_a^b \varphi(z)\cdot e^{-xz}\, dz\,. \qquad (1')$$

Diese und die übrige Gleichheit in (1) sind genau die oben citirten Gleichheiten (I) der Nro 420 des zweiten Bandes meines Werkes, und da (I) auch noch für $x = o$ Bestand hat, so hat man auch:

$$\int_0^\infty \int_a^b \frac{z\,\varphi(z)}{\alpha^2+z^2}\, dz\, d\alpha = \frac{\pi}{2}\int_a^b \varphi(z)\, dz\,, \qquad (2)$$

welches Ergebniss mit der Gleichung (II) in der eben citirten Nro übereinstimmt.

Um ebenso die angeführten Gleichheiten in (III) directe nachzuweisen, unterlegen wir folgende Identitäten:

$$\int_0^\infty \int_a^b \varphi(z)\, e^{-\alpha z} \cos x\alpha\, dz\, d\alpha = \int_a^b \left(\int_0^\infty e^{-z\alpha} \cos x\alpha\, d\alpha\right) \varphi(z)\, dz\,,$$

$$\int_0^\infty \int_a^b \varphi(z)\, e^{-\alpha z} \sin x\alpha\, dz\, d\alpha = \int_a^b \left(\int_0^\infty e^{-z\alpha} \sin x\alpha\, d\alpha\right) \varphi(z)\, dz\,;$$

es bestehen aber [Ir. Nr. 159 Gl. (53)] die Bestimmungen:

$$\int_0^\infty e^{-z\alpha} \cos x\,\alpha\, d\alpha = \frac{z}{x^2+z^2}\,, \int_0^\infty e^{-z\alpha} \sin x\,\alpha\, d\alpha = \frac{x}{x^2+z^2}$$

für alle reelle Verfügungen über x, sonach hat man die Gleichheiten:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty \int_a^b \varphi(z)\, e^{-z\alpha} \cos x\,\alpha\, dz\, d\alpha &= \int_a^b \frac{z\,\varphi(z)}{x^2+z^2}\, dz\,, \\ \int_0^\infty \int_a^b \varphi(z)\, e^{-\alpha z} \sin x\,\alpha\, dz\, d\alpha &= \int_a^b \frac{x\,\varphi(z)}{x^2+z^2}\, dz \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ebenfalls für alle reelle Werthe von x bestehend, welche genau die Gleichheiten (III) in der oben citirten Nro sind.

VII.

Ueber einige ohne Integrations-Verrichtung gewonnene Integral-Ergebnisse.

VORWORT.

Die niedere Arithmetik liefert schon einige Beispiele analogen Inhaltes zur vorliegenden Mittheilung dar. Wenn z. B. von einer bestimmten ganzen Zahl die Zahl 996 subtrahirt werden soll, so kann die eigentliche Subtraction dadurch umgangen werden, dass man zum Minuendus die Zahl 4 addirt, und hierauf die Ziffer der Tausender um eine Einheit verringert. Wenn z. B. ferner eine vorgelegte ganze Zahl durch 25 dividirt werden soll, so kann die eigentliche Division dadurch umgangen werden, dass man den Dividendus mit 4 multiplicirt, und im Ergebnisse die Ziffern der Einheiten und Zehner unterdrückt. — Analog hiemit habe ich einige Integralbestimmungen, sei es ohne irgend welche Integrationsverrichtung, oder auf die höchst einfache Integration von $\int dx$ zurückgebracht erhalten, die ich im Folgenden vorführen werde.

1. Das von Poisson behandelte bestimmte Integral:

$$\int_0^{\pi} \log \cdot (1 + a^2 + 2a\mathrm{Cos.}\, x)\, dx,$$

wo $a^2 < 1$ ist, sei durch $f(a)$ dargestellt, nämlich man setze:

$$f(a) = \int_0^{\pi} \log \cdot (1 + a^2 + 2a\mathrm{Cos.}\, x)\, dx,$$

so hat man, wenn x durch $\pi - x$ ersetzt wird, auch:

$$f(a) = \int_0^{\pi} \log \cdot (1 + a^2 - 2a\mathrm{Cos.}\, x)\, dx;$$

addirt man diese zwei Gleichungen, so ist:

$$2f(a) = \int_0^{\pi} \log(1 + a^4 - 2a^2 \operatorname{Cos} 2x)\, dx;$$

ersetzt man hier $2x$ durch x, so ist auch:

$$4f(a) = \int_0^{2\pi} \log(1 + a^4 - 2a^2 \operatorname{Cos} x)\, dx.$$

Zerlegt man dieses bestimmte Integral in eine Summe zweier, das eine von $x = 0$ bis $x = \pi$, und das andere von $x = \pi$ bis $x = 2\pi$; ersetzt man im letztern x durch $\pi + x$, so gelangt man zuletzt auf:

$$4f(a) = 2\int_0^{\pi} \log(1 + a^4 + 2a^2 \operatorname{Cos} x)\, dx,$$

aus der beachtend die Bestimmungsgleichung von $f(a)$ folgende Funktionalgleichung gezogen wird:

$$f(a) = \frac{1}{2} f(a^2).$$

Aus dieser findet man nach und nach folgende Gleichheiten:

$$f(a) = \frac{1}{2} f(a^2) = \frac{1}{2^2} f(a^4) = \frac{1}{2^3} f(a^8) = \frac{1}{2^4} f(a^{16}) \text{ u. s. w.}$$

und zuletzt:

$$f(a) = \frac{1}{2^n} f(a^{2^n}).$$

Da wir hier $a^2 < 1$ angenommen haben, so nähert sich der Ausdruck $f(a^{2^n})$ beim beständigen Wachsen von n ohne Ende dem Werthe von $f(0)$; es ist aber nach der Begriffsgleichung $f(0) = 0$, daher hat man auch $f(a) = 0$, d. h. man hat ohne irgend welche Integrationsverrichtung die Bestimmung:

$$\int_0^{\pi} \log(1 + a^2 \pm 2a \operatorname{Cos} x)\, dx = 0 \qquad (a)$$

gewonnen, wenn $a^2 < 1$ ist.

2. Sei ferner der zweite Fall:

$$f(a) = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + a^2 - 2a \operatorname{Cos} x}$$

vorgelegt, wo wir die einzige Annahme treffen, dass a nicht der reellen Einheit gleich ist.

Durch Zerlegung des bestimmten Integrals gelangt man sehr bald auf:

$$f(a) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + a^2 - 2a\,\mathrm{Cos}\,x} + \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + a^2 + 2a\mathrm{Cos}\,x} ,$$

woraus

$$f(a) = 2(1 + a^2) \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + a^4 - 2a^2\mathrm{Cos}\,2x} ,$$

oder auch:

$$f(a) = (1 + a^2) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + a^4 - 2a^2\mathrm{Cos}\,x}$$

erhalten wird; folglich hat man beachtend die Begriffsgleichung von f(a) folgende Funktionalgleichung:

$$f(a) = (1 + a^2)\, f(a^2) , \qquad (1)$$

die auch mit folgender einerlei ist:

$$f(a) = \frac{1 - a^4}{1 - a^2} f(a^2) . \qquad (2)$$

Ersetzt man in (1) a durch a^2, und führt das Ergebniss in (2) ein, so hat man:

$$f(a) = \frac{1 - a^8}{1 - a^2} f(a^4) ; \qquad (3)$$

ersetzt man in (1) a durch a^4, und führt das Ergebniss in (3) ein, so hat man:

$$f(a) = \frac{1 - a^{16}}{1 - a^2} f(a^8) ;$$

fährt man in dieser zweimal befolgten Weise fort, so gelangt man auf folgende allgemeine Gleichheit:

$$f(a) = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a^2} f(a^{2^n}).$$

Ist nun a reell und numerisch kleiner wie die Einheit, oder ist a eine einfache oder complexe imaginäre Zahl, deren Modul (in der Bedeutung von Cauchy genommen) kleiner wie die Einheit ist; dann hat man, da unter n jede beliebig grosse Zahl, also auch eine unendlich gross werdende gedacht werden kann, die einfache Gleichheit:

$$f(a) = \frac{1}{1 - a^2} f(0). \qquad (4)$$

Ist aber a reell und numerisch grösser wie die Einheit, oder ist es der Modul bei der Annahme eines imaginären Werthes von a, dann hat man zuerst wegen der Begriffsgleichung von f(a):

$$f(a) = \frac{1}{a^2} f\left(\frac{1}{a}\right) ;$$

wendet man auf $f\left(\frac{1}{a}\right)$ das Ergebniss in (4) an, so gelangt man gegenwärtig auf:

$$f(a) = -\frac{1}{1-a^2} f(0).$$

Man hat also:

$$f(a) = \pm\frac{1}{1-a^2} f(0), \qquad (5)$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn die Constante a oder deren Modul < 1 ist, das untere Zeichen aber bei der entgegengesetzten Ungleichheit Statt findet.

Aus der Begriffsgleichung von f(a) folgt ferner

$$f(0) = \int_0^{2\pi} dx;$$

daher hat man bloss mit Zuziehung der einfachen Integrationsverrichtung in dieser Gleichung, die auf $f(0) = 2\pi$ führt, die Integralbestimmung:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+a^2-2a\,\mathrm{Cos}\,x} = \pm\frac{2\pi}{1-a^2}, \qquad (b)$$

wie auch beachtend die Gleichheit (2), die $f(-a) = f(a)$ gibt;

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+a^2+2a\,\mathrm{Cos}\,x} = \pm\frac{2\pi}{1-a^2}. \qquad (b')$$

Das obere oder untere Zeichen gilt in diesen Ergebnissen, je nachdem die reell gedachte Zahl a oder, im Fall sie imaginär ist, ihr Modul kleiner oder grösser als die Einheit ist.

3. Als drittes Beispiel theile ich hier auch eine Differenzialgleichung erster Ordnung mit, deren vollständige Integralgleichung ebenfalls ohne irgend welche Integrationsverrichtung erzielt werden kann.

Wenn zu einem dreiachsigen Ellipsoid der Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (1)$$

wo a, b, c die Hälften der drei Achsen vorstellen, die die Ungleichheiten $a > b > c$ eingehen, die sogenannten Krümmungscurven in irgend einem Punkte hergestellt werden sollen; dann hat man für die orthogonale Projection dieser Krümmungscurven in die Coordinatenebene der xy folgende Differenzialgleichung erster Ordnung zwischen x und y zu integriren:

$$Axyy_1^2 + (x^2 - Ay^2 - B)\,y_1 - xy = 0, \qquad (2)$$

wo zur Abkürzung:

$$A = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}, \quad B = a^2 \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \tag{3}$$

gesetzt worden ist, und y_1 den Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$ vorstellt.*)

Diese Differenzialgleichung (2) ist es, die ich im Folgenden ohne irgend eine Integrationsverrichtung vollständig integriren werde.

Dividirt man diese Differenzialgleichung durch y_1, und differenzirt sie hierauf nach y und x, so gelangt man sehr bald auf:

$$\left(A + \frac{1}{y_1^2}\right) (xyy_2 + xy_1^2 - yy_1) = 0, \tag{4}$$

wo y_2 den zweiten Differenzialquotienten von y nach x repräsentirt. Sieht man nun von dem Faktor dieser Gleichung, der den Differenzialquotienten zweiter Ordnung nicht mitführt, ab, so hat man es mit folgender Differenzialgleichung zweiter Ordnung zu thun:

$$xyy_2 + xy_1^2 - yy_1 = 0. \tag{5}$$

Die Integration dieser kann durch die Bemerkung umgangen werden, dass sie, obwohl nur ein einmaliges Differenziationsergebniss der Gleichung (2), gleichwohl von den beiden allgemeinen Constanten A und B, die diese enthält, befreit ist. Es folgt nämlich hieraus, wenn der Gegenstand rein analytisch aufgefasst wird, dass eine von diesen zwei Constanten nothwendig eine sogenannte „überflüssige" ist.

Wenn daher eine dieser zwei Constanten durch die Null und die andere durch irgend eine allgemeine Constante ersetzt wird, dann bietet das Ergebniss eine vollständige Integralgleichung unmittelbar vorhergehender Ordnung dieser Differenzialgleichung zweiter Ordnung in (5) dar. Setzen wir sonach in (2):

$$A = 0 \text{ und } B = n,$$

wodurch sie in folgende übergeht:

$$(x^2 - n) y_1 - xy = 0, \tag{6}$$

wo n eine allgemeine Constante bedeutet: so ist diese eine vollständige Integralgleichung unmittelbar vorhergehender Ordnung zu (5); und da sie simultan mit (2) besteht: so bietet das Eliminationsergebniss von y_1 aus denselben folgende dar:

$$\frac{1}{n} x^2 + \frac{A}{n - B} y^2 = 1, \tag{7}$$

---

*) Monge, Application de l'analyse à la géométrie, pag. 123.

welche die endliche und, weil die allgemeine Constante n mitführend, die vollständige Integralgleichung zu (2) ist.

Betreffend den unbeachtet gelassenen Faktor in Gleichung (4), bemerken wir, dass derselbe der Null gleich gesetzt, wie bekannt, die singuläre Integralauflösung herbeiführt, und dass diese endlich auf die vier von Monge zuerst bemerkten „Ombilics“ oder die sogenannten Nabelpunkte führt.

4. Auf eine Differenzialgleichung gleicher Ordnung und Beschaffenheit, wie die in (2) vorangehender Nr. wird man auch geführt, wenn man die Krümmungscurve an einem Punkte irgend einer Oberfläche zweiten Grades sucht, wie solches in vorliegender Nr. gezeigt werden soll.

Jede Fläche zweiten Grades zwischen den Coordinaten x, y, z eines ihrer Punkte kann durch eine Transformation der Coordinaten jedesmal durch eine Gleichung folgender Form:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dx + 2Ey + 2Fz + G = o \qquad (1')$$

ausgedrückt werden, wo also die Glieder, welche die Produkte je zweier Coordinaten enthalten, fehlen, und wo die Coefficienten A, B, C, ... reelle Constanten sind.

Stellt man nun nach dem gemachten Citat vorhergehender Nr. für die vorliegende Fläche in $(1')$ die analoge zur Differenzialgleichung (2) daselbst her, so gelangt man auf folgende Differenzialgleichung erster Ordnung:

$$(B-C)(Ax+D)(By+E)\,y_1^2$$
$$+\{(B-C)(Ax+D)^2+(C-A)(By+E)^2-(A-B)(Cz+F)^2\}y_1$$
$$+(C-A)(Ax+D)(By+E)=o,$$

aus der noch z mittelst der Gleichung $(1')$ zu eliminiren ist.

Bedenkt man zu diesem Zwecke, dass $(1')$ auch folgendermassen gestellt werden kann:

$$\frac{(Ax+D)^2}{A}+\frac{(By+E)^2}{B}+\frac{(Cz+F)^2}{C}=\alpha,$$

wo man

$$\alpha=\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{B}+\frac{F^2}{C}-G \qquad (8)$$

gesetzt hat, so leuchtet sofort das Verfahren, die vorhin erwähnte Elimination von z durchzuführen, ein, und die so sich ergebende Differenzialgleichung zwischen x und y ist folgende:

$$(B-C)(Ax+D)(By+E)\,y_1^2$$
$$+\left\{\frac{B}{A}(A-C)(Ax+D)^2-\frac{A}{B}(B-C)(By+E)^2-C\alpha(A-B)\right\}y_1$$
$$-(A-C)(Ax+D)(By+E)=0.$$

Diese scheinbar complicirte Differenzialgleichung erster Ordnung ist sehr leicht auf die Eingangs dieser Nr. erwähnte Form zu bringen, wenn die Integrationsvariabeln x und y durch zwei neue x' und y' den folgenden Gleichungen gemäss ersetzt werden:

$$Ax+D=x',\quad By+E=y';\qquad (9)$$

und da aus diesen:

$$y_1=\frac{A}{B}\frac{dy'}{dx'}$$

gefolgert wird; — so stellt sich die vorhergehende Differenzialgleichung nunmehr unter der angekündigten Form dar:

$$ax'y'\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2+(x'^2-ay'^2-b)\frac{dy'}{dx'}-x'y'=0,\qquad (2')$$

wo Kürze halber:

$$a=\frac{A^2}{B^2}\cdot\frac{B-C}{A-C},\quad b=\frac{ABC}{B^2}\cdot\frac{A-B}{A-C}\alpha\qquad (10)$$

gesetzt worden ist.

Die weitere Behandlung dieser Differenzialgleichung zwischen x' und y', um zur Kenntniss ihrer vollständigen Integralgleichung, ohne irgend eine Integrationsverrichtung zu gelangen, unterliegt nunmehr keinem weiteren Zweifel. — Diese Integralgleichung wird nach dem Vorbilde der Gleichung (7) vorangehender Nr. folgender Beschaffenheit sein:

$$\frac{1}{n}x'^2+\frac{a}{n-b}y'^2=1$$

wo n die allgemeine Integrationsconstante repräsentirt; werden hier noch x' und y' durch x und y den Gleichungen (9) gemäss ersetzt, so hat man

$$\frac{1}{n}(Ax+D)^2+\frac{a}{n-b}(By+E)^2=1\qquad (7')$$

welche Gleichung vereint mit Gleichung (1') die Krümmungscurve zur allgemeinsten Oberfläche zweiten Grades in (1') repräsentirt.

5. Nicht in dem Grade, wie die vorausgeschickten Fälle, kann doch die Bestimmung von $\int_0^1 \log\Gamma(x+a)\,dx$ etwelchermassen zu den

in der Ueberschrift vorliegender Mittheilung angedeuteten Fällen gezählt werden, wo $\Gamma(z)$ die von Legendre eingeführte Bezeichnung der Function von z ist, welche das Euler'sche Integral zweiter Art werthet.

Zur Werthung des erwähnten Integrals lege ich den folgenden bekannten Satz dieser Function Gamma zu Grunde:

$$\Gamma(na) = \Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\,n^{na-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1-n}{2}},$$

wo n irgend eine ganze positive Zahl, und a eine allgemeine positive Grösse vorstellt. Wird diese Gleichung logarithmisch aufgelöst, und hiebei n als eine unendlich grosswerdende Zahl erklärt, so gelangt man sofort auf die Gleichung:

$$\int_0^{a+1}\log\Gamma(x)\,dx = \omega\log\Gamma\left(\frac{a}{\omega}\right)+\left(a-\frac{1}{2}\omega\right)\log\omega + \frac{1-\omega}{2}\log 2\pi,$$

wo die unendlichklein werdende Zahl ω gleich $\frac{1}{n}$ ist.

Setzt man folgende Vereinfachungsgleichung fest:

$$\varphi(a) = \omega\log\Gamma\left(\frac{a}{\omega}\right)+a\log\omega\,, \qquad (1)$$

so ist die unmittelbar vorher aufgestellte Gleichung auch mit folgender gleichbedeutend:

$$\int_0^1\log\Gamma(x+a)\,dx = \frac{1}{2}\log 2\pi+\varphi(a). \qquad (2)$$

Anstatt nun $\varphi(a)$ mit Hülfe der Gleichheit (1) zu ermitteln, schlage ich gegenwärtig folgenden einfachern Weg ein.

Durch Differenziation der Gleichheit (2) nach a ergibt sich:

$$\int_0^1\frac{\Gamma_1(x+a)}{\Gamma(x+a)}\,dx = \varphi_1(a),$$

oder, wenn die Integration linkerhand vollzogen wird:

$$\log\frac{\Gamma(1+a)}{\Gamma(a)} = \varphi_1(a),$$

die wegen der bekannten Eigenschaft der Funktion Γ, nämlich $\Gamma(1+a) = a\Gamma(a)$, in:

$$\varphi_1(a) = \log a$$

übergeht, die nach einer wirklichen Integration auf

$$\varphi(a) = a\log a - a + \text{Const.}$$

führt. Bei der Annahme $a = \omega$ gelangt man einerseits aus dieser auf:

$$\varphi(\omega) = \text{Const.},$$

und andererseits aus (1) auf $\varphi(\omega) = 0$; daher ist $0 = \text{Const.}$, und man hat:

$$\varphi(a) = a \log a - a;$$

folglich geht die Gleichung (2) über in:

$$\int_0^1 \log \Gamma(x+a)\, dx = a \log a - a + \frac{1}{2} \log 2\pi, \qquad (3)$$

welche Bestimmung für alle reellen Werthe von a Bestand hat.

VIII.

Einige Anwendungen der verallgemeinerten Stirlingischen Reihe.

VORWORT.

Zur näherungsweisen Berechnung eines bestimmten Integrals hat man, nach Poisson, die in Nr. 234 des ersten Bandes meiner Integralrechnung dargethane Gleichung:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx =$$

$$v\left\{\frac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+v)+\varphi(a+2v)\ldots.\right.$$

$$\left.+\varphi(a+(n-1)v)+\frac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$

$$-Y_2\left\{\varphi_1(b)-\varphi_1(a)\right\}v^2+Y_4\left\{\varphi_3(b)-\varphi_3(a)\right\}v^4-\ldots$$

$$\ldots\ldots.(-1)^m Y_{2m}\left\{\varphi_{2m-1}(b)-\varphi_{2m-1}(a)\right\}v^{2m}$$

$$+2(-1)^{m+1}\left(\frac{v}{2\pi}\right)^{2m}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{r^{2m}}\int_a^b \varphi_{2m}(x)\,\mathrm{Cos}\,2r\pi\left(\frac{x-a}{v}\right)dx, \quad (1)$$

wo folgende Abkürzungen bestehen:

$$Y_{2r}=\frac{2}{(2\pi)^{2r}}\left\{1+\frac{1}{2^{2r}}+\frac{1}{3^{2r}}+\frac{1}{4^{2r}}+\text{in inf.}\right\},$$

$$b-a=nv,$$

und wo endlich $\varphi_k(x)$ den k^{ten} Differenzialquotienten von $\varphi(x)$ nach x vorstellt.

Die Reihe von Gliedern nun, die die Coefficienten Y_2, Y_4, Y_6, Y_8, ... mitführen, nenne ich die verallgemeinerte Stirlingische Reihe, die zur Angabe der innerhalb den Klammern auf der ersten und zweiten

Zeile rechts vom Gleichheitszeichen befindlichen Summe benutzt werden kann, wovon in der gegenwärtigen Mittheilung einige Anwendungen vorgeführt werden sollen.

1. Als erste Anwendung unterziehe ich den Fall, wenn $\varphi(x)$ irgend eine ganze, positive Potenz von x ist. Wird diese Potenz einmal als gerade der Form 2m und ein andermal als ungerade der Form $2m+1$ angenommen, wo m ganz und positiv, bei der letztern Annahme auch der Null gleich sein kann; dann bietet die allgemeine Gleichung (1) vollkommen genau die folgenden zwei Ergebnisse dar:

$$\int_0^a x^{2m}\,dx = v^{2m+1}\left\{1^{2m} + 2^{2m} + 3^{2m} + \ldots (n-1)^{2m} + \frac{1}{2}n^{2m}\right\}$$
$$- 2m\,Y_2\,a^{2m-1}\,v^2 + 2m\,(2m-1)\,(2m-2)\,Y_4\,a^{2m-3}\,v^4$$
$$- 2m\,(2m-1)\,(2m-2)\,(2m-3)\,(2m-4)\,Y_6\,a^{2m-5}\,v^6$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (-1)^m\,2m\,(2m-1)\,(2m-2)\,(2m-3)\ldots 3.\,2\,Y_{2m}\,av^{2m},$$

$$\int_0^a x^{2m+1}\,dx = v^{2m+2}\left\{1^{2m+1} + 2^{2m+1} + 3^{2m+1}\ldots\right.$$
$$\left. + (n-1)^{2m+1} + \frac{1}{2}n^{2m+1}\right\}$$
$$- (2m+1)\,Y_2\,a^{2m}\,v^2 + (2m+1)\,2m\,(2m-1)\,Y_4\,a^{2m-2}\,v^4$$
$$- (2m+1)\,2m\,(2m-1)\,(2m-2)\,(2m-3)\,Y_6\,a^{2m-4}\,v^6$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-1)^m\,(2m+1)\,2m\,(2m-1)\ldots 3\,Y_{2m}\,a^2v^{2m},$$

wo $nv = a$ gesetzt ist.

Führt man die Bernoullischen Zahlen durch die Gleichung:

$$Y_{2r} = \frac{B_r}{1.\,2.\,3.\,4\ldots.\,2r} \qquad (1)$$

ein, wo B_r die r^{te} Bernoullische Zahl ist; vollzieht man hierauf die bestimmten Integrale linker Hand der Gleichheitszeichen und ersetzt endlich überall a durch nv, so gewinnt man folgende zwei bekannten Summationen:

$$1^{2m} + 2^{2m} + 3^{2m} + 4^{2m} + \ldots (n-1)^{2m} =$$
$$= \frac{n^{2m+1}}{2m+1} - \frac{1}{2}n^{2m} + \frac{1}{2}\binom{2m}{1}B_1\,n^{2m-1} - \frac{1}{4}\binom{2m}{3}B_2\,n^{2m-3}$$
$$+ \frac{1}{6}\binom{2m}{5}B_3\,n^{2m-5} - \ldots \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m}{2m-1}B_m\,n, \qquad (2)$$

$$1^{2m+1} + 2^{2m+1} + 3^{2m+1} + 4^{2m+1} + \ldots (n-1)^{2m+1} =$$

$$= \frac{n^{2m+2}}{2m+2} - \frac{1}{2} n^{2m+1} + \frac{1}{2}\binom{2m+1}{1} B_1 n^{2m}$$

$$- \frac{1}{4}\binom{2m+1}{3} B_2 n^{2m-2} + \frac{1}{6}\binom{2m+1}{5} B_3 n^{2m-4} - \ldots$$

$$\ldots \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m+1}{2m-1} B_m n^2, \qquad (3)$$

wo allgemein unter $\binom{\lambda}{k}$ der Coefficient von x^k in der Entwickelung von $(1+x)^\lambda$ zu verstehen ist; so dass man bei Einführung der Jacob Bernoullischen Functionen für gerade und ungerade Exponenten*) die Bestimmungsgleichungen hat:

$$B''(n) = 1^{2m} + 2^{2m} + 3^{2m} + \ldots . (n-1)^{2m}, \qquad (2')$$

$$B'(n) = 1^{2m+1} + 2^{2m+1} + 3^{2m+1} + \ldots . (n-1)^{2m+1}, \qquad (3')$$

wo nach der citirten Schrift die Bestimmungsgleichungen bestehen:

$$B''(x) = \frac{x^{2m+1}}{2m+1} - \frac{1}{2} x^{2m} + \frac{1}{2}\binom{2m}{1} B_1 x^{2m-1}$$

$$- \frac{1}{4}\binom{2m}{3} B_2 x^{2m-3} + \ldots \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m}{2m-1} B_m x, \qquad (4)$$

$$B'(x) = \frac{x^{2m+2}}{2m+2} - \frac{1}{2} x^{2m+1} + \frac{1}{2}\binom{2m+1}{1} B_1 x^{2m}$$

$$- \frac{1}{4}\binom{2m+1}{3} B_2 x^{2m-2} + \ldots \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m+1}{2m-1} B_m x^2. \qquad (5)$$

Da wir in der folgenden Nr. diese Funktionen $B''(x)$ und $B'(x)$ zur Discussion bringen werden, so theilen wir die wesentlichen Eigenschaften dieser Funktionen mit, wie man solche in der citirten Schrift nachgewiesen einsehen kann.

Zuerst hat man:

$$B(1+x) - B(x) = x^m, \quad B(x) + (-1)^m B(-x) = -x^m, \qquad (6)$$

wo, wenn m gerade und durch 2m ersetzt wird, das Funktionszeichen B durch B'' aus Gleichung (4) zu ersetzen ist; wenn aber m ungerade und durch $2m+1$ dargestellt wird, hat man das Functionszeichen B durch B' der Gleichung (5) gemäss zu ersetzen.

---

*) Die Jacob Bernoullische Function. 1848.

Aus den Eigenschaftsgleichungen (6) zieht man sehr bald folgende:

$$B(1-x) + (-1)^m B(x) = 0. \qquad (7)$$

Differenzirt man ferner die Gleichheit (5) nach x, so gelangt man bald auf:

$$B_1'(x) = (2m+1) B''(x), \qquad (8)$$

wo $B_1'(x)$ den Differenzialquotienten von $B'(x)$ nach x bedeutet.

Wird ferner in (5) die ganze Zahl m um eine Einheit verringert, und stellt man die betreffende Funktion alsdann durch $'B(x)$ vor, so gelangt man alsbald auf folgendes zu (8) coordinirte Resultat:

$$B_1''(x) = 2m\,'B(x) + (-1)^{m-1} B_m, \qquad (9)$$

wo $B_1''(x)$ den Differenzialquotienten von $B''(x)$ nach x vorstellt.

2. Wird als zweite Anwendung der allgemeinen Gleichung (1):

$$\varphi(x) = B''(x), \text{ wie } \varphi(x) = B'(x)$$

angenommen, so gelangt man auf folgende zwei Resultate:

$$\int_a^{a+1} B''(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2}B''(a) + B''\left(a+\frac{1}{n}\right) + \ldots B''\left(a+\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{2}B''(a+1)\right\}$$

$$-\binom{2m}{1}\frac{a^{2m-1}}{2n^2}B_1 + \binom{2m}{3}\frac{a^{2m-3}}{4n^4}B_3 - \binom{2m}{5}\frac{a^{2m-5}}{6n^6}B_5$$

$$+ \ldots\ldots (-1)^m\binom{2m}{2m-1}\frac{a}{2m\,.\,n^{2m}}B_m,$$

$$\int_a^{a+1} B'(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2}B'(a) + B'\left(a+\frac{1}{n}\right) + \ldots B'\left(a+\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{2}B'(a+1)\right\}$$

$$-\binom{2m+1}{1}\frac{a^{2m}B_1}{2n^2} + \binom{2m+1}{3}\frac{a^{2m-2}B_2}{4n^4} - \binom{2m+1}{5}\frac{a^{2m-4}B_3}{6n^6}$$

$$+ \ldots (-1)^m\binom{2m+1}{2m+1}\frac{a^2 B_m}{2m\,.\,n^{2m}} + (-1)^{m+1}\binom{2m+1}{2m+1}\frac{B_{m+1}}{(2m+2)n^{2m+2}}$$

wo wir die Bernoullischen Zahlen $B_1, B_2, B_3 \ldots\ldots B_m, B_{m+1}$ mit Hülfe der Gleichung (1) vorangehender Nr. eingeführt, wie ausserdem noch die erstere Gleichung in (6) durch ein successives Differenziren nach x benutzt haben.

Beachtet man nunmehr die Begriffsgleichungen (4) und (5) der

Functionen $B''(x)$ und $B'(x)$, so sind diese Ergebnisse auch mit folgenden einerlei:

$$\int_a^{a+1} B''(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{2n}\left\{B''(1+a) - B''(a)\right\} +$$

$$+\frac{1}{n}\left\{B''(a) + B''\left(a+\frac{1}{n}\right) + B''\left(a+\frac{2}{n}\right) + \ldots B''\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{n^{2m+1}}\left\{-B''(na) + \frac{(na)^{2m+1}}{2m+1} - \frac{1}{2}(na)^{2m}\right\},$$

$$\int_a^{a+1} B'(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{2n}\left\{B'(1+a) - B'(a)\right\} +$$

$$+\frac{1}{n}\left\{B'(a) + B'\left(a+\frac{1}{n}\right) + B'\left(a+\frac{2}{n}\right) + \ldots B'\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{n^{2m+2}}\left\{-B'(na) + \frac{(na)^{2m+2}}{2m+2} - \frac{1}{2}(na)^{2m+1} + \frac{(-1)^{m+1}B_{m+1}}{2m+2}\right\}$$

und da die erstere der Gleichheiten in (6) folgende darbietet:

$$B''(1+a) - B''(a) = a^{2m},$$

$$B'(1+a) - B'(a) = a^{2m+1},$$

so hat man auch

$$\int_a^{a+1} B''(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{n}\left\{B''(a) + B''\left(a+\frac{1}{n}\right) + B''\left(a+\frac{2}{n}\right) + \ldots B''\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\right\}$$

$$-\frac{1}{n^{2m+1}}\left\{B''(na) - \frac{(na)^{2m+1}}{2m+1}\right\},$$

$$\int_a^{a+1} B'(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{n}\left\{B'(a) + B'\left(a+\frac{1}{n}\right) + B'\left(a+\frac{2}{n}\right) + \ldots B'\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\right\}$$

$$-\frac{1}{n^{2m+1}}\left\{B'(na) - \frac{(na)^{2m+2}}{2m+2} + \frac{(-1)^m B_{m+1}}{2m+2}\right\}.$$

Betreffend die noch zu vollziehenden bestimmten Integrale ziehen wir die Gleichheiten (8) und (9) zu. Erstere führt unmittelbar auf:

$$B'(a+1) - B'(a) = (2m+1) \int_a^{a+1} B''(x)\, dx\,;$$

daher hat man beachtend die erste der Gleichheiten in (6):

$$\int_a^{a+1} B''(x)\, dx = \frac{a^{2m+1}}{2m+1}\,. \qquad (10)$$

Letztere oder die Gleichheit (9) gibt unmittelbar folgende:

$$B''(a+1) - B''(a) = 2m \int_a^{a+1} {}'B(x)\, dx + (-1)^{m-1} B_m\,,$$

die mit abermaliger Zuziehung der erstern Gleichheit in (6) auf:

$$a^{2m} = 2m \int_a^{a+1} {}'B(x)\, dx + (-1)^{m-1} B_m$$

führt; erhöhet man hier m um eine Einheit, so geht nach getroffenem Uebereinkommen in vorangehender Nr. $'B(x)$ in $B'(x)$ über, und man hat:

$$a^{2m+2} = (2m+2) \int_a^{a+1} B'(x)\, dx + (-1)^m B_{m+1}\,,$$

woraus

$$\int_a^{a+1} B'(x)\, dx = \frac{a^{2m+2}}{2m+2} + \frac{(-1)^{m+1}}{2m+2} B_{m+1} \qquad (11)$$

erhalten wird.

Mit Hilfe dieser Ergebnisse in (10) und (11) bieten die obigen zwei allgemeinen Resultate folgende zwei Theoreme, betreffend die Bernoullischen Functionen $B''(x)$ und $B'(x)$ dar:

$$\frac{1}{n^{2m}} B''(na) = B''(a) + B''\left(a + \frac{1}{n}\right) + B''\left(a + \frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + B''\left(a + \frac{n-1}{n}\right), \qquad (12)$$

$$\frac{1}{n^{2m+1}} B'(na) = B'(a) + B'\left(a + \frac{1}{n}\right) + B'\left(a + \frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + B'\left(a + \frac{n-1}{n}\right) + \frac{(-1)^m}{2m+2}\left(n - \frac{1}{n^{2m+1}}\right) B_{m+1}\,, \qquad (13)$$

die ich auf mehr synthetischem Wege in meiner oben citirten Schrift

ebenfalls bewiesen habe. Dieselben bestehen ihrer Ableitung nach für alle reellen Werthe von a, wie für alle ganzen und positiven Zahlenwerthe von n.

3. Als dritte Anwendung sei in der allgemeinen Gleichung (1):

$$\varphi(x) = \log \Gamma(x)$$

festgestellt. — Da bei dieser Annahme keiner der Differenzialquotienten von $\varphi(x)$ den Nullwerth annimmt, so haben wir uns zunächst mit der Herstellung der Form des m^{ten} Differenzialquotienten von $\varphi(x)$ nach x zu befassen, um von der am Eingange zu Grunde gelegten Gleichung (1) Nutzen zu ziehen.

Die Funktion $\Gamma(x)$ wird bekanntlich durch das Euler'sche Integral zweiter Art, wie auch durch folgende, ohne Ende fortlaufende Factorenfolge definirt:

$$\Gamma(x) = \frac{1.2.3.\ldots\ldots\ldots k \cdot k^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots.(x+k-1)}, \qquad (14)$$

wo k eine ohne Ende wachsende, positive und ganze Zahl vorstellt.

Diesem nach hat man

$$\varphi(x) = \log.\ 1.\ 2.\ 3.\ldots.\ k + (x-1)\log.\ k - \log.\ x - \log.(x+1) - \log.(x+2)\cdots - \log.(x+k-1),$$

und durch successives Differenziren:

$$\varphi_1(x) = \log.\ k - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\cdots - \frac{1}{x+k-1},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \cdots \frac{1}{(x+k-1)^2},$$

$$\varphi_3(x) = -1.2\left\{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \cdots + \frac{1}{(x+k-1)^3}\right\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_{2m-1}(x) =$$

$$-1.2\ldots.(2m-2)\left\{\frac{1}{x^{2m-1}} + \frac{1}{(x+1)^{2m-1}} + \cdots \frac{1}{(x+k-1)^{2m-1}}\right\},$$

$$\varphi_{2m}(x) =$$

$$+1.2\ldots.(2m-1)\left\{\frac{1}{x^{2m}} + \frac{1}{(x+1)^{2m}} + \cdots \frac{1}{(x+k-1)^{2m}}\right\}.$$

Hieraus ziehen wir für unsern folgenden Bedarf erstens

$$\varphi_{2r+1}(a+1) - \varphi_{2r+1}(a) =$$
$$= -1.2.3\ldots 2r \left\{ \frac{1}{(a+k)^{2r+1}} - \frac{1}{a^{2r+1}} \right\},$$

und weil k eine unendlich gross werdende Zahl ist, hat man für jedes endliche a:

$$\varphi_{2r+1}(a+1) - \varphi_{2r+1}(a) = \frac{1.2.3.4\ldots 2r}{a^{2r+1}}.$$

Zweitens zeigt die für $\varphi_{2m}(x)$ aufgestellte Bestimmung, dass jeder gerade Differenzialquotient von $\varphi(x)$ oder von $\log \Gamma(x)$, für alle angebbaren Werthe von x Resultate mit gleichen Vorzeichen darbietet.

Dieses nun vorausgeschickt, bietet die allgemeine Gleichung (1) folgende speciellere dar:

$$\int_a^{a+1} \log \Gamma(x)\, dx =$$

$$\frac{1}{n}\left\{ \frac{1}{2}\log\Gamma(a) + \log\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right) + \log\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right) + \ldots \right.$$
$$\left. + \log\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{2}\log\Gamma(a+1) \right\}$$
$$- a\left\{ \frac{1}{(an)^2} Y_2 - \frac{1.2}{(an)^4} Y_4 + \frac{1.2.3.4}{(an)^6} Y_6 + \ldots \right.$$
$$\left. (-1)^{m-1} \frac{1.2.3\ldots(2m-2)}{(an)^{2m}} Y_{2m} \right\},$$

wo wir v durch $\frac{1}{n}$ ersetzt haben, und wo, nach einem in Nr. 233 meiner Integralrechnung dargethanem Satze, der Fehler, den man begeht, wenn man den Ausdruck rechterhand statt dem linkerhand vom Gleichheitszeichen setzt, kleiner als das letzte Glied, nämlich kleiner als:

$$(-1)^m \frac{1.2.3\ldots.(2m-2)}{a^{2m-1}\cdot n^{2m}} Y_{2m}$$

ist.

Stellt man das zuletzt aufgestellte Integrationsergebniss folgendermassen:

$$\int_a^{a+1} \log.\Gamma(x)\,dx = \frac{1}{2n}\log.\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}$$

$$+\frac{1}{n}\log.\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)..\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)$$

$$-a\left\{\frac{1}{(an)^2}Y_2-\frac{1.2}{(an)^4}Y_4+\frac{1.2.3.4}{(an)^6}Y_6-..\right.$$

$$\left..\frac{(-1)^{m-1}\,1.2.3...(2m-2)}{(an)^{2m}}Y_{2m}\right\},$$

das mit Beachtung der bekannten Eigenschaften der Funktion Gamma folgende Integralgleichung darbietet:

$$\int_a^{a+1} \log.\Gamma(x)\,dx = \frac{1}{2n}\log.a+\frac{1}{n}\log.\frac{\Gamma(na)}{n^{na-\frac{1}{2}}\,(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}}$$

$$-a\left\{\frac{1}{(na)^2}Y_2-\frac{1.2}{(na)^4}Y_4+\frac{1.2.3.4}{(na)^6}Y_6-..\right.$$

$$\left..\frac{(-1)^{m-1}\,1.2.3...(2m-2)}{(na)^{2m}}Y_{2m}\right\}.$$

Ferner habe ich am Schlusse der unmittelbar vorhergehenden Mittheilung gefunden:

$$\int_0^1 \log.\Gamma(x+a)\,dx = a\log.a-a+\frac{1}{2}\log.2\pi;$$

und da das gegenwärtig in Rede stehende Integral mit diesem eben aufgestellten dem Werthe nach einerlei ist, so hat man, beachtend noch die Gleichheit:

$$\Gamma(na)=\frac{\Gamma(1+na)}{na}$$

folgendes Ergebniss:

$$\log.\frac{\Gamma(1+na)}{(na)^{na+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}=$$

$$=-na+\frac{1}{na}Y_2-\frac{1.2}{(na)^3}Y_4+\frac{1.2.3.4}{(na)^5}Y_6-..$$

$$..\frac{(-1)^{m-1}\,1.2.3...(2m-2)}{(na)^{2m-1}}Y^{2m},$$

wo bei jeder beliebigen Annahme über m, d. h. bei welchem Gliede

auch immer die auf der zweiten und dritten Zeile vorkommende Reihe (welche die eigentliche Stierlingische ist) abgebrochen wird, der Fehler beständig numerisch kleiner als das zuletzt noch in Anspruch genommene Glied ist.

Hier stellt a eine beliebige angebbare Zahl dar, daher kann auch durch na jedwede angebbare Zahl vorgestellt sein; wenn sonach na durch α ersetzt wird, so hat man die Gleichheit

$$\log. \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi}} = -\alpha + \frac{1}{\alpha} Y_2 - \frac{1.2}{\alpha^3} Y_4 + \frac{1.2.3.4}{\alpha^5} Y_6 - \frac{1.2.3.4.5.6}{\alpha^7} Y_8 + \ldots,$$

oder wenn man nach Gleichung (1) die Bernoullischen Zahlen einführt:

$$\log. \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi}} = -\alpha + \frac{B_1}{1.2} \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{B_2}{3.4} \cdot \frac{1}{\alpha^3} + \frac{B_3}{5.6} \cdot \frac{1}{\alpha^5} - \frac{B_4}{7.8} \cdot \frac{1}{\alpha^7} + \ldots \quad (15)$$

wo der Fehler, den man begeht, wenn der Ausdruck rechterhand statt des Ausdruckes linkerhand gesetzt wird, beständig kleiner als das Glied ist, mit dem die Rechnung abgebrochen wird.

Die Glieder in dieser Stierlingischen Reihe, nämlich in der rechterhand von (15), nehmen so lange ab, als der Index r eines derselben kleiner oder höchstens gleich $\alpha\pi$ ist; daher wird man den kleinsten Fehler begehen, wenn mit dem Gliede

$$\frac{B_r}{(2r-1)\,2r} \quad \frac{1}{\alpha^{2r-1}}$$

die Rechnung abbricht, indem $r \leqq \alpha\pi$ gesetzt wird.

So z. B. wird man bei $\alpha = 10$ mit dem 31sten Gliede die Rechnung abzubrechen haben; ebenso bei $\alpha = 100$ mit dem 314ten Gliede, oder bei $\alpha = 1000$ mit dem 3141sten Gliede u. s. w., um das möglichst genaueste Resultat zu erzielen.

4. Aus dem Ergebnisse in (15) lassen sich Grenzbestimmungen für die Funktion $\Gamma(1+\alpha)$ angeben, denen wir die vorliegende Nro ausschliesslich bestimmen.

Zuerst nimmt man ab, wenn α eine ohne Ende wachsende Zahl ist, dass folgende Grenzgleichung besteht:

$$\text{Lim. } \Gamma(1+k) = k^k \sqrt{2k\pi} \cdot e^{-k}, \qquad (16)$$

wo das Grenzzeichen Lim. auf das unendliche Wachsen von k Bezug hat.

Stellt aber α eine endliche, positiv reelle Zahl vor, und setzt man:

$$\log. \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi}} = -\alpha + \frac{B_1}{2\alpha},$$

so ist der bei dieser Annahme mögliche Fehler numerisch kleiner als $\frac{B_1}{2\alpha}$. Stellt diesem nach β einen Kreisbogen vom Halbmesser eins vor, dessen Länge innerhalb o und π gedacht ist, so besteht die fehlerfreie Gleichung:

$$\log \cdot \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi}} = -\alpha + \frac{B_1}{2\alpha} + \frac{B_1}{2\alpha} \cos \beta,$$

oder auch:

$$\log \cdot \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi} \cdot e^{-\alpha}} = \frac{B_1}{\alpha} \left(\cos \frac{1}{2}\beta \right)^2;$$

und da der Ausdruck rechterhand positiv ist, hat man die Ungleichheit:

$$\log \cdot \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi}} > -\alpha. \qquad (17)$$

Verbleibt immer α eine endliche, positiv reelle Zahl und setzt man:

$$\log \cdot \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi}} = -\alpha + \frac{B_1}{2\alpha} - \frac{B_2}{3.4.\alpha^3},$$

so ist der gegenwärtig zu befürchtende Fehler numerisch kleiner als $\frac{B_2}{3.4.\alpha^3}$; wenn daher durch β ein ähnlicher Bogen wie unmittelbar vorher dargestellt wird, hat man:

$$\log \cdot \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi}} = -\alpha + \frac{B_1}{2\alpha} - \frac{B_2}{6\alpha^3} \left(\cos \frac{1}{2}\beta \right)^2,$$

oder auch

$$\log \cdot \frac{\alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi}}{\Gamma(1+\alpha)} = \alpha - \frac{B_1}{2\alpha} + \frac{B_2}{6\alpha^3} \left(\cos \frac{1}{2}\beta \right)^2;$$

wird überdies noch $\alpha > 1$ gedacht, so hat man die Grenzgleichung:

$$\log \cdot \frac{\alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi}}{\Gamma(1+\alpha)} > \alpha - \frac{B_1}{2\alpha},$$

oder auch

$$\log \cdot \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi}} < -\alpha + \frac{B_1}{2\alpha}. \qquad (18)$$

Bei denselben Annahmen über α und β hat man ferner:

$$\log \cdot \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi}} = -\alpha + \frac{B_1}{2\alpha} - \frac{B_2}{3.4.\alpha^3} + \frac{B_3}{15\alpha^5}\left(\cos\frac{1}{2}\beta\right)^2,$$

woraus durch ähnliche Betrachtungen wie in vorausgeschickten zwei Fällen die Ungleichheit

$$\log \cdot \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi}} > -\alpha + \frac{B_1}{2\alpha} - \frac{B_2}{3.4\alpha^3} \qquad (19)$$

erhalten wird.

Wird nun in dieser Weise fortgefahren, so gelangen wir zuletzt auf folgenden Satz:

Bricht man in der Reihe zur Rechten der Gleichung (15) mit irgend einem Gliede, das den Faktor B_r trägt, die Rechnung ab (wobei nothwendig $r < \alpha\pi$ sein muss): so erhält man ein zu grosses oder zu kleines Resultat, verglichen mit dem Ausdrucke zur Linken, je nachdem r eine ungerade oder gerade Zahl vorstellt.

Mit Zugrundlegung dieses Theorems gelangt man auf folgende Reihe von Ungleichheiten:

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma(1+\alpha) > \alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi} \cdot e^{-\alpha},\\
&\Gamma(1+\alpha) < \alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi} \cdot e^{-\alpha} \cdot e^{\frac{B_1}{1\cdot 2\alpha}},\\
&\Gamma(1+\alpha) > \alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi} \cdot e^{-\alpha} \cdot e^{\frac{B_1}{1\cdot 2\alpha}} \cdot e^{-\frac{B_2}{3\cdot 4\alpha^3}},\\
&\Gamma(1+\alpha) < \alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi} \cdot e^{-\alpha} \cdot e^{\frac{B_1}{1\cdot 2\alpha}} \cdot e^{-\frac{B_2}{3\cdot 4\alpha^3}} \cdot e^{\frac{B_3}{5\cdot 6\alpha^5}},
\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

u. s. w.,

wo man bis zum Faktor $e^{\pm \frac{B_r}{(2r-1)\,2r\alpha^{2r-1}}}$ fortgehen kann, wenn $r \leq \alpha\pi$ ist. Das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem r ungerad oder gerad ist; und alle diese Ungleichheiten finden Statt, wenn die positive, beliebige, reelle Zahl α grösser denn die Einheit ist.

IX.

Zugaben zur Jakob Bernoulli'schen Funktion und Einführung einer neuen, die „Euler'sche Funktion" genannt.

VORWORT.

In den vorliegenden Blättern werde ich in einem ersten Abschnitte A. einige beachtenswerthe Zugaben zur Bernoullischen Funktion mittheilen, wobei besagte Funktion nicht mehr in linearer, sondern in quadratischer Form, wie in Verbindungen zweiter Dimensionen auftreten wird. — In einem darauffolgenden zweiten Abschnitte B. wird dann gezeigt werden, dass die Summe der endlichen Gliederreihe

$$1^m - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - \ldots \quad \cdot + (2x-1)^m$$

durch einen die Euler'schen Zahlen oder die Sekanten-Coefficienten umfassenden Ausdruck in ähnlicher Weise wie die endliche Gliederreihe

$$1^m + 2^m + 3^m + 4^m + \ldots\ldots + \alpha^m$$

durch eine die Bernoullischen Zahlen oder die Tangenten-Coefficienten umfassende Summe ausdrückbar sei. Der so introducirte neue Summenausdruck, der, eine Funktion von x, von mir der Analogie wegen die „Eulersche Funktion" genannt wird, wird dann in Relation mit der Bernoulli'schen Funktion gebracht und mit Hülfe dieser in Beziehung auf Eigenthümlichkeit näher untersucht.

A.

Zur Jakob Bernoulli'schen Funktion.

1. Im 42. Bande des Crelle'schen Journals habe ich für die Jakob Bernoullische Funktion mit geradem und ungeradem Exponenten, nämlich für $B''(x)$ und $B'(x)$ folgende Darstellungen gegeben:

$$\left.\begin{aligned} B''(x) &= \frac{2(-1)^{m+1}}{(2\pi)^{2m+2}}\,\Gamma(2m+1)\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\operatorname{Sin} 2k\pi x}{k^{2m+1}}\,, \\ B'(x) &= \frac{2(-1)^{m}}{(2\pi)^{2m+1}}\,\Gamma(2m+2)\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\operatorname{Cos} 2k\pi x}{k^{2m+2}} + \frac{(-1)^{m-1}}{2m+2}\,B_{m+1}\,, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wo B_{m+1} die $(m+1)$te Bernoullische Zahl ist, und nach Legender für jeden positiven, ganzen Zahlenwerth von a die Gleichung

$$\Gamma(a) = 1.2.3\ldots.(a-1)$$

identisch besteht. Diese Gleichheiten bestehen für alle Werthe von $x=o$ bis $x=1$; nur, wenn $m=o$ angenommen wird, besteht die erstere der Gleichheiten (1) lediglich innerhalb dieser Grenzwerthe von x.

Multiplicirt man jede dieser Gleichheiten (1) sowohl mit $B''(x)\,e^{2r\pi xi}\,dx$, wie mit $B'(x)\,e^{2r\pi xi}\,dx$, wo r eine ganze Zahl vorstellt, und integrirt hierauf von $x=o$ bis $x=1$, so ergeben sich unmittelbar folgende 4 Gleichungen:

$$\int_0^1 B''(x)^2\,e^{2r\pi xi}\,dx = M\sum_{k=1}^{k=\infty}\left\{\int_0^1 B''(x)\,e^{2r\pi xi}\operatorname{Sin} 2k\pi x\,dx\right\}\cdot\frac{1}{k^{2m+1}}\,,$$

$$\int_0^1 B''(x)B'(x)\,e^{2r\pi xi}\,dx = M\sum_{k=1}^{k=\infty}\left\{\int_0^1 B'(x)\,e^{2r\pi xi}\operatorname{Sin} 2k\pi x\,dx\right\}\cdot\frac{1}{k^{2m+1}}\,,$$

$$\int_0^1 B'(x)B''(x)\,e^{2r\pi xi}\,dx = M'\sum_{k=1}^{k=\infty}\left\{\int_0^1 B''(x)\,e^{2r\pi xi}\operatorname{Cos} 2k\pi x\,dx\right\}\cdot\frac{1}{k^{2m+2}} + \frac{(-1)^{m-1}}{2m+2}\,B_{m+1}\int_0^1 B''(x)\,e^{2r\pi xi}\,dx\,,$$

$$\int_0^1 B'(x)^2\,e^{2r\pi xi}\,dx = M'\sum_{k=1}^{k=\infty}\left\{\int_0^1 B'(x)\,e^{2r\pi xi}\operatorname{Cos} 2k\pi x\,dx\right\}\cdot\frac{1}{k^{2m+2}} + \frac{(-1)^{m-1}}{2m+2}\,B_{m+1}\int_0^1 B'(x)\,e^{2r\pi xi}\,dx\,,$$

wo der Kürze wegen

$$M = \frac{2(-1)^{m-1}}{(2\pi)^{2m+1}}\,\Gamma(2m+1)\,,\quad M' = \frac{2(-1)^{m}}{(2\pi)^{2m+2}}\,\Gamma(2m+2)$$

gesetzt worden, und wo unter i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ zu verstehen ist.

Werden in bekannter Weise die Produkte $e^{2r\pi xi}\,\mathrm{Sin}\,2k\pi x$, $e^{2r\pi xi}\,\mathrm{Cos}\,2k\pi x$ in Summen der Vielfachen von πx zerlegt; berücksichtigt man die in der Eingangs citirter Abhandlung aufgestellten Gleichungen (6) und (7), nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^1 B''(x)\,dx = o\,, \quad \int_0^1 B'(x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}}{2m+2} B_{m+1}\,,\\
&\int_0^1 B''(x)\,\mathrm{Cos}\,2r\pi x\,dx = o\,, \quad \int_0^1 B''(x)\,\mathrm{Sin}\,2r\pi x\,dx = \frac{1}{2} M \cdot \frac{1}{r^{2m+1}}\,,\\
&\int_0^1 B'(x)\,\mathrm{Sin}\,2r\pi x\,dx = o\,, \quad \int_0^1 B'(x)\,\mathrm{Cos}\,2r\pi x\,dx = \frac{1}{2} M' \cdot \frac{1}{r^{2m+2}}\,,
\end{aligned}\right\} (\alpha)$$

wo r irgend eine ganze Zahl bedeutet; beachtet man endlich folgende Summengleichungen:

$$\sum_{k=r+1}^{k=\infty} \frac{1}{[k(k-r)]^\lambda} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{[k(k+r)]^\lambda}\,,$$

$$\sum_{k=r+1}^{k=\infty} \frac{1}{k^\mu (k-r)^\lambda} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^\lambda (k+r)^\mu}\,,$$

die sehr bald folgende herbeiführen:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{[k\,(k+r)]^\lambda} + \sum_{k=r+1}^{k=\infty} \frac{1}{[k\,(k-r)]^\lambda} = 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{[k\,(k+r)]^\lambda}\,,$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^\lambda\,(k+r)^{\lambda+1}} - \sum_{k=r+1}^{k=\infty} \frac{1}{k^\lambda\,(k-r)^{\lambda+1}} = -\,r \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{[k\,(k+r)^{\lambda+1}}\,,$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{\lambda+1}\,(k+r)^\lambda} - \sum_{k=r+1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{\lambda+1}\,(k-r)^\lambda} = +\,r \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{[k\,(k+r)]^{\lambda+1}}\,,$$

so gelangt man auf folgende Integralbestimmungen:

$$\int_0^1 B''(x)^2\,e^{2r\pi xi}\,dx =$$

$$= \frac{2\,\Gamma(2m+1)^2}{(2\pi)^{4m+2}} \left\{ \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{[k\,(k+r)]^{2m+1}} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=r-1} \frac{1}{[k\,(r-k)]^{2m+1}} \right\}, \quad (2)$$

$$\int_0^1 B'(x)^2\, e^{2r\pi xi}\, dx = -\frac{2}{2m+2}\cdot\frac{\Gamma(2m+2)}{(2r\pi)^{2m+2}}\, B_{m+1}$$

$$+\frac{2\,\Gamma(2m+2)^2}{(2\pi)^{4m+4}}\left\{\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{[k(k+r)]^{2m+2}}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=r-1}\frac{1}{[k(r-k)]^{2m+2}}\right\}, \quad (3)$$

$$\int_0^1 B''(x)\, B'(x)\, e^{2r\pi xi}\, dx = \frac{i}{2m+2}\cdot\frac{\Gamma(2m+1)}{(2r\pi)^{2m+1}}\, B_{m+1}$$

$$-\frac{ir}{2m+1}\,\frac{\Gamma(2m+2)^2}{(2\pi)^{4m+3}}\left\{\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{[k(k+r)]^{2m+2}}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{[k(r-k)]^{2m+2}}\right\}. \quad (4)$$

Die letztere dieser Gleichungen ist durch Addition der beiden oben aufgestellten Werthe des Integrals linkerhand erhalten worden.

Auf diese Ergebnisse bin ich schon seit längerer Zeit geführt worden. Den weiteren Vereinfachungen derselben standen die zu vollziehenden Summationen innerhalb der Grenzen $k=1$ und $k=\infty$ entgegen, die ich auf keine einfachen Formen zu bringen vermochte. Diese Schwierigkeit ist nun, wie aus der folgenden Nr. hervorgehen wird, beseitigt, wo wir sehen werden, dass auch Summationen wie die hier vorliegenden durch eine endliche Anzahl der erstern Bernoullischen Zahlen jedesmal durchgeführt werden können.

2. Durchs Zerlegen in Partialbrüche gelangt man auf folgende Gleichheit:

$$\frac{1}{x^m(x-1)^m}=\sum_{\varrho=0}^{\varrho=m-1}(-1)^\varrho\binom{m+\varrho-1}{\varrho}\cdot\frac{1}{(x-1)^{m-\varrho}}+$$

$$+(-1)^m\sum_{\varrho=0}^{\varrho=m-1}\binom{m+\varrho-1}{\varrho}\cdot\frac{1}{x^{m-\varrho}},$$

wo allgemein $\binom{n}{k}$ den Coefficienten von x^k in der Entwicklung von $(1+x)^n$ vorstellt. Aus diesen Gleichheiten zieht man, wenn nämlich x durch $\frac{x}{r}$ ersetzt wird, bald folgende:

$$\frac{r^m}{x^m(x-r)^m} = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m-1} \frac{(-1)^\varrho}{r^\varrho}\binom{m+\varrho-1}{\varrho} \cdot \frac{1}{(x-r)^{m-\varrho}} +$$

$$+ (-1)^m \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m-1} \frac{1}{r^\varrho}\binom{m+\varrho-1}{\varrho} \cdot \frac{1}{x^{m-\varrho}}, \qquad (5)$$

und wenn hier x am r erhöht wird, hat man auch:

$$\frac{r^m}{x^m(x+r)^m} = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m-1} \frac{(-1)^\varrho}{r^\varrho}\binom{m+\varrho-1}{\varrho} \cdot \frac{1}{x^{m-\varrho}} +$$

$$+ (-1)^m \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m-1} \frac{1}{r^\varrho}\binom{m+\varrho-1}{\varrho} \cdot \frac{1}{(x+r)^{m-\varrho}}. \qquad (6)$$

Viel allgemeiner hat man auch

$$\frac{(a-b)^m}{(x-a)^m(x-b)^m} = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m-1} \frac{(-1)^\varrho}{(a-b)^\varrho}\binom{m+\varrho-1}{\varrho} \cdot \frac{1}{(x-a)^{m-\varrho}} +$$

$$+ (-1)^m \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m-1} \frac{1}{(a-b)^\varrho}\binom{m+\varrho-1}{\varrho} \cdot \frac{1}{(x-b)^{m-\varrho}}, \qquad (7)$$

wo a und b beliebige, von x unabhängige Grössen vorstellen, und m eine ganze positive Zahl ist.

Aus der Gleichheit (6) zieht man sehr leicht folgende Summenbestimmung:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{[k(k+r)]^{2m}} =$$

$$= \frac{1}{r^{2m}} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=2m-1} \binom{2m+\varrho-1}{\varrho} \frac{1}{r^\varrho} \left\{ (-1)^\varrho \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2m-\varrho}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2m-\varrho}} - \sum_{k=1}^{k=r} \frac{1}{k^{2m-\varrho}} \right\},$$

die auch folgendermassen gestellt werden kann:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{[k(k+r)]^{2m}} = \frac{2}{r^{2m}} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m-1} \binom{2m+2\varrho-1}{2\varrho} \frac{1}{r^{2\varrho}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2m-2\varrho}}$$

$$- \frac{1}{r^{2m}} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=2m-1} \sum_{k=1}^{k=r-1} \binom{2m+\varrho-1}{\varrho} \frac{1}{\varrho^k} \cdot \frac{1}{k^{2m-\varrho}}$$

$$- \frac{1}{r^{4m}} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m-1} \binom{2m+\varrho-1}{\varrho} .$$

Stellt B_n die nte Bernoullische Zahl dar, so ist, wie bekannt:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{1}{2} \frac{(2\pi)^{2n}}{\Gamma(2n+1)} B_n \quad ; \qquad (8)$$

ferner überzeugt man sich sehr bald von der Richtigkeit folgender Summengleichung:

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=n} \binom{m+\varrho-1}{\varrho} = \binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m} . \qquad (9)$$

Diesem nach ergibt sich:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{[k(k+r)]^{2m}} = \left(\frac{2\pi}{r}\right)^{2m} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m-1} \frac{1}{(2r\pi)^{2\varrho}} \cdot \frac{\binom{2m+2\varrho-1}{2\varrho}}{\Gamma(2m-2\varrho+1)} \cdot B_{m-\varrho}$$

$$- \frac{1}{r^{2m}} \cdot \sum_{\varrho=0}^{\varrho=2m-1} \sum_{k=1}^{k=r-1} \binom{2m+\varrho-1}{\varrho} \cdot \frac{1}{r^\varrho} \cdot \frac{1}{k^{2m-\varrho}}$$

$$- \frac{1}{r^{4m}} \binom{4m-1}{2m-1} .$$

Ferner bietet die Gleichheit (5) sehr bald folgende dar:

$$\sum_{k=1}^{k=r-1} \frac{1}{[k(r-k)]^{2m}} =$$

$$= \frac{2}{r^{2m}} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=2m-1} \sum_{k=1}^{k=r-1} \binom{2m+\varrho-1}{\varrho} \cdot \frac{1}{r^\varrho} \cdot \frac{1}{k^{2m-\varrho}} ;$$

sonach erhält man folgende Summengleichung:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{[k(k+r)]^{2m}} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=r-1} \frac{1}{[k(r-k)]^{2m}} =$$

$$= \left(\frac{2\pi}{r}\right)^{2m} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m-1} \frac{1}{(2r\pi)^{2\varrho}} \cdot \frac{\binom{2m+2\varrho-1}{2\varrho}}{\Gamma(2m-2\varrho+1)} B_{m-\varrho}$$

$$- \frac{1}{r^{4m}} \binom{4m-1}{2m-1} . \qquad (10)$$

In gleicher Weise wie hier, d. h. mit Zuziehung der aufgestellten Ergebnisse in (5, 6, 8, 9) sind wir auch auf folgende Summengleichung geführt worden:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{[k(k+r)]^{2m+1}} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=r-1} \frac{1}{[k(r-k)]^{2m+1}} =$$

$$= - \left(\frac{2\pi}{r}\right)^{2m+1} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m-1} \frac{1}{(2r\pi)^{2\varrho+1}} \cdot \frac{\binom{2m+2\varrho+1}{2\varrho+1}}{\Gamma(2m-2\varrho+1} B_{m-\varrho} +$$

$$+ \frac{1}{r^{4m+2}} \binom{4m+1}{2m} , \qquad (11)$$

welches Ergebniss vereinigt mit dem in (10) die Richtigkeit unserer Behauptung Ausgangs vorangehender Nr. ganz unzweideutig darthut.

3. Mit Zuziehung der unmittelbar vorher aufgestellten Gleichungen gehen die Gleichungen (2, 3, 4) über in folgende:

$$\int_0^1 B''(x)^2 \, e^{2r\pi xi} \, dx = \frac{2\Gamma(2m+1)^2}{(2r\pi)^{2m+1}} \left\{ \frac{1}{(2r\pi)^{2m+1}} \binom{4m+1}{2m} \right.$$

$$\left. - \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m-1} \frac{1}{(2r\pi)^{2\varrho+1}} \cdot \frac{\binom{2m+2\varrho+1}{2\varrho+1}}{\Gamma(2m-2\varrho+1} B_{m-\varrho} \right\} ,$$

$$\int_0^1 B'(x)^2 \, e^{2r\pi xi} \, dx = - \frac{2\Gamma(2m+2)^2}{(2r\pi)^{2m+2}} \left\{ \frac{1}{(2r\pi)^{2m+2}} \binom{4m+3}{2m+1} \right.$$

$$\left. - \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m-1} \frac{1}{(2r\pi)^{2\varrho+2}} \cdot \frac{\binom{2m+2\varrho+3}{2\varrho+2}}{\Gamma(2m-2\varrho+1)} B_{m-\varrho} \right\} ,$$

$$\int_0^1 B''(x)\,B'(x)\,e^{2r\pi xi}\,dx = \frac{i}{2m+1}\cdot\frac{\Gamma(2m+2)^2}{(2r\pi)^{2m+1}}\left\{\frac{1}{(2r\pi)^{2m+2}}\binom{4m+3}{2m+1}\right.$$

$$\left. -\sum_{\varrho=0}^{\varrho=m-1}\frac{1}{(2r\pi)^{2\varrho+2}}\cdot\frac{\binom{2m+2\varrho+3}{2\varrho+2}}{\Gamma(2m-2\varrho+1)}\,B_{m-\varrho}\right\},$$

die für alle ganzen Werthe von r Bestand haben.

Ersetzt man in den Summen rechterhand das Argument ϱ durch $m-\varrho$, so stellen sich diese Bestimmungen folgendermassen dar:

$$\int_0^1 B''(x)^2\,e^{2r\pi xi}\,dx = \frac{2\,\Gamma(2m+1)^2}{(2r\pi)^{4m+2}}\left\{\binom{4m+1}{2m}\right.$$

$$\left. -\sum_{\varrho=1}^{\varrho=m}\binom{4m-2\varrho+1}{2m}\frac{(2r\pi)^{2\varrho}}{\Gamma(2\varrho+1)}\,B_\varrho\right\}, \qquad (12)$$

$$\int_0^1 B'(x)^2\,e^{2r\pi xi}\,dx = -\frac{2\,\Gamma(2m+2)^2}{(2r\pi)^{4m+4}}\left\{\binom{4m+3}{2m+1}\right.$$

$$\left. -\sum_{\varrho=1}^{\varrho=m}\binom{4m-2\varrho+3}{2m+1}\frac{(2r\pi)^{2\varrho}}{\Gamma(2\varrho+1)}\,B_\varrho\right\}, \qquad (13)$$

$$\int_0^1 B''(x)\,B'(x)\,e^{2r\pi xi}\,dx = \frac{i\,\Gamma(2m+1)\,\Gamma(2m+2)}{(2r\pi)^{4m+3}}\left\{\binom{4m+3}{2m+1}\right.$$

$$\left. -\sum_{\varrho=1}^{\varrho=m}\binom{4m-2\varrho+3}{2m+1}\frac{(2r\pi)^{2\varrho}}{\Gamma(2\varrho+1)}\,B_\varrho\right\}. \qquad (14)$$

Trennt man nun linkerhand der Gleichheitszeichen die reellen von den imaginären Theilen, so ergeben sich folgende Integralbestimmungen:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^1 B''(x)^2\,\mathrm{Sin}\,2r\pi x\,dx = 0, \quad \int_0^1 B'(x)^2\,\mathrm{Sin}\,2r\pi x\,dx = 0,\\ &\int_0^1 B''(x)\,B'(x)\,\mathrm{Cos}\,2r\pi x\,dx = 0;\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

$$\int_0^1 B''(x)^2 \operatorname{Cos} 2r\pi x \, dx = \frac{2\,\Gamma(2m+1)^2}{(2r\pi)^{4m+2}} \left\{ \binom{4m+1}{2m} - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=m} \binom{4m-2\varrho+1}{2m} \frac{(2r\pi)^{2\varrho}}{\Gamma(2\varrho+1)} B_\varrho \right\}, \quad (16)$$

$$\int_0^1 B'(x)^2 \operatorname{Cos} 2r\pi x \, dx = -\frac{2\,\Gamma(2m+2)^2}{(2r\pi)^{4m+4}} \left\{ \binom{4m+3}{2m+1} - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=m} \binom{4m-2\varrho+3}{2m+1} \frac{(2r\pi)^{2\varrho}}{\Gamma(2\varrho+1)} B_\varrho \right\}, \quad (17)$$

$$\int_0^1 B''(x)\, B'(x) \operatorname{Sin} 2r\pi x \, dx = \frac{\Gamma(2m+1\ \Gamma(2m+2)}{(2r\pi)^{4m+3}} \left\{ \binom{4m+3}{2m+1} - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=m} \binom{4m-2\varrho+3}{2m+1} \frac{(2r\pi)^{2\varrho}}{\Gamma(2\varrho+1)} B_\varrho \right\}, \quad (18)$$

wo r jede ganze, positive wie negative Zahl vorstellen kann.

Die Gleichungen (15) bestehen auch noch für $r=o$, wie man sich sehr leicht überzeugen kann; die Gleichungen (16, 17, 18) hingegen bieten Unbestimmtheiten, in den Ausdrücken rechterhand der Gleichheitszeichen, bei der Annahme $r=o$ dar. Die dieser Annahme entsprechenden bestimmten Integrale der Gleichungen (16, 17) sind schon in der citirten ersten Abhandlung bestimmt worden, und bieten nach den Gleichungen (9) der Nro 2 daselbst folgende Werthe dar:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^1 B''(x)^2 \, dx &= \frac{\Gamma(2m+1)^2}{\Gamma(4m+3)} B_{2m+1}, \\ \int_0^1 B'(x)^2 \, dx &= \frac{\Gamma(2m+2)^2}{\Gamma(4m+5)} B_{2m+2} + \frac{B_{m+1}^2}{(2m+2)^2}; \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

so dass man die Ausdrücke rechterhand dieser Gleichungen als die Werthe der entsprechenden Ausdrücke in den Gleichungen (16, 17) bei der Annahme $r=o$ ansehen kann.

4. Aus den vorausgeschickten Ergebnissen ziehen wir nun einige Folgerungen, wozu wir die allgemeine Gleichung unterlegen:

$$\int_0^1 \varphi(x)dx = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2}\varphi(0)+\varphi\left(\frac{1}{n}\right)+\varphi\left(\frac{2}{n}\right)+..+\varphi\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{1}{2}\varphi(1)\right\}$$

$$-2\sum_{r=1}^{r=\infty}\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{Cos}\,2nr\pi x\,dx\,, \qquad (20)$$

wo n wie r ganze und positive Zahlenwerthe bedeuten.

Wird hier zuerst $\varphi(x) = B''(x)^2$ gesetzt; ersetzt man dann in (16) r durch nr, und nimmt noch die erste der Gleichungen (19) zu Hülfe, — so ergibt sich, beachtend $B''(o) = o$ wie $B''(1) = o$, folgende Gleichung:

$$\frac{\Gamma(2m+1)^2}{\Gamma(4m+3)}\,B_{2m+1} =$$

$$= \frac{1}{n}\left\{B''\left(\frac{1}{n}\right)^2+B''\left(\frac{2}{n}\right)^2+B''\left(\frac{3}{n}\right)^2+\ldots\quad B''\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}$$

$$-\frac{4\,\Gamma(2m+1)^2}{(2n\pi)^{4m+2}}\left\{\binom{4m+1}{2m}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{r^{4m+2}}\right.$$

$$\left.-\sum_{\varrho=1}^{\varrho=m}\left(\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{r^{4m-2\varrho+2}}\right)\frac{\binom{4m-2\varrho+1}{2m}}{\Gamma(2\varrho+1)}(2n\pi)^{2\varrho}\,B_\varrho\right\},$$

die mit Beachtung der Gleichung (8) in folgende übergeht:

$$B''\left(\frac{1}{n}\right)^2+B''\left(\frac{2}{n}\right)^2+B''\left(\frac{3}{n}\right)^2+\ldots\quad B''\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 =$$

$$= \frac{\Gamma(2m+1)^2}{\Gamma(4m+3)}\left\{n+\frac{2}{n^{4m+1}}\binom{4m+1}{2m}\right\}B_{2m+1}$$

$$-\frac{2\,\Gamma(2m+1)^2}{n^{4m+1}}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=m}\binom{4m-2\varrho+1}{2m}\frac{n^{2\varrho}\,B_\varrho\,B_{2m-\varrho+1}}{\Gamma(2\varrho+1)\,\Gamma(4m-2\varrho+3)},$$

oder auch in folgende:

$$\frac{\Gamma(4m+3)}{\Gamma(2m+1)^2}\left\{B''\left(\frac{1}{n}\right)^2+B''\left(\frac{2}{n}\right)^2+B''\left(\frac{3}{n}\right)^2+\ldots\ B''\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\} =$$

$$= \left\{n+\frac{2}{n^{4m+1}}\binom{4m+1}{2m}\right\}B_{2m+1}$$

$$-\frac{2}{n^{4m+1}}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=m}\binom{4m-2\varrho+1}{2m}\binom{4m+2}{2\varrho}n^{2\varrho}\,B_\varrho\,B_{2m-\varrho+1}\,, \qquad (21)$$

welche auch folgendermassen gestellt werden kann:

$$\frac{\Gamma(4m+3)}{\Gamma(2m+1)^2}\left\{B''\left(\frac{1}{n}\right)^2+B''\left(\frac{2}{n}\right)^2+B''\left(\frac{3}{n}\right)^2+\ldots\ B''\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}=$$

$$=\left\{n+\frac{2}{n^{4m+1}}\binom{4m+1}{2m}\right\}B_{2m+1}$$

$$-\frac{2}{n^{4m+1}}\sum_{\varrho=0}^{\varrho=m-1}\binom{2m+2\varrho+1}{2m}\binom{4m+2}{2m+2\varrho+2}n^{2m-2\varrho}B_{m-\varrho}B_{m+\varrho+1}. \quad (21')$$

Diese zwei Ergebnisse bestehen für alle positiven und ganzen Werthe von n, wo nicht ausser Acht zu lassen, dass der innerhalb der Klammern linkerhand der Gleichheitszeichen enthaltene Ausdruck der Null gleich ist, wenn $n=1$ angenommen wird, so dass man bei Unterlegung von (21') folgende Recursion unter den Bernoullischen Zahlen hat:

$$\left[\frac{1}{2}+\binom{4m+1}{2m}\right]B_{2m+1}=$$

$$=\sum_{\varrho=0}^{\varrho=m-1}\binom{2m+2\varrho+1}{2m}\binom{4m+2}{2m+2\varrho+2}B_{m-\varrho}B_{m+\varrho+1}. \quad (22)$$

Wird in der allgemeinen Gleichung (20) die zweite Annahme $\varphi(x)=B'(x)^2$ gemacht; ersetzt man dann in (17) r durch nr, und nimmt die zweite der Gleichungen (19) zu Hülfe; — so ergibt sich beachtend $B'(0)=0$, $B'(1)=0$ folgende Gleichung:

$$\frac{\Gamma(2m+2)^2}{\Gamma(4m+5)}B_{2m+2}+\frac{1}{(2m+2)^2}B_{m+1}=$$

$$=\frac{1}{n}\left\{B'\left(\frac{1}{n}\right)^2+B'\left(\frac{2}{n}\right)^2+B'\left(\frac{3}{n}\right)^2+..\ B'\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}$$

$$+\frac{4\,\Gamma(2m+2)^2}{(2n\pi)^{4m+4}}\left\{\binom{4m+3}{2m+1}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{r^{4m+4}}\right.$$

$$\left.-\sum_{\varrho=1}^{\varrho=m}\left(\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{r^{4m-2\varrho+4}}\right)\frac{\binom{4m-2\varrho+3}{2m+1}}{\Gamma(2\varrho+1)}(2n\pi)^{2\varrho}B_\varrho\right\},$$

aus der ähnlich wie oben folgende gezogen wird:

$$\frac{\Gamma(4m+5)}{\Gamma(2m+2)^2}\left\{B'\left(\frac{1}{n}\right)^2+B'\left(\frac{2}{n}\right)^2+B'\left(\frac{3}{n}\right)^2+..\ B'\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}=$$

$$=\left\{n-\frac{2}{n^{4m+3}}\binom{4m+3}{2m+1}\right\}B_{2m+2}$$

$$+\frac{2}{n^{4m+3}}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=m}\binom{4m-2\varrho+3}{2m+1}\binom{4m+4}{2\varrho}n^{2\varrho}\,B_\varrho\,B_{2m-\varrho+2}$$

$$+n\binom{4m+4}{2m+2}B_{m+1}^2\,, \qquad (23)$$

welche auch, wie folgt, gestellt werden kann:

$$\frac{\Gamma(4m+5)}{\Gamma(2m+2)^2}\left\{B'\left(\frac{1}{n}\right)^2+B'\left(\frac{2}{n}\right)^2+B'\left(\frac{3}{n}\right)^2+\ldots\ B'\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}=$$

$$=\left\{n-\frac{2}{n^{4m+3}}\binom{4m+3}{2m+1}\right\}B_{2m+2}$$

$$+\frac{2}{n^{4m+3}}\sum_{\varrho=0}^{\varrho=m-1}\binom{2m+2\varrho+3}{2m+1}\binom{4m+4}{2m+2\varrho+4}n^{2m-2\varrho}\,B_{m-\varrho}\,B_{m+\varrho+2}$$

$$+n\binom{4m+4}{2m+2}B_{m+1}^2\ . \qquad (23')$$

Auch diese Ergebnisse bestehen für alle ganzen und positiven Werthe von n, und führen bei der Annahme $n=1$ auf die Gleichung:

$$\left[\binom{4m+3}{2m+1}-\frac{1}{2}\right]B_{2m+2}=\frac{1}{2}\binom{4m+4}{2m+2}B_{m+1}^2$$

$$+\sum_{\varrho=0}^{\varrho=m-1}\binom{2m+2\varrho+3}{2m+1}\binom{4m+4}{2m+2\varrho+4}B_{m-\varrho}\,B_{m+\varrho+2}\ . \qquad (24)$$

Wird endlich in der allgemeinen Gleichung (20) $\varphi(x)=B''(x)\,B'(x)$ angenommen, so gelangt man beachtend die dritte der Gleichungen in (15) auf:

$$B'\left(\frac{1}{n}\right)B''\left(\frac{1}{n}\right)+B'\left(\frac{2}{n}\right)B''\left(\frac{2}{n}\right)+B'\left(\frac{3}{n}\right)B''\left(\frac{3}{n}\right)+\ldots$$

$$\ldots+B'\left(\frac{n-1}{n}\right)B''\left(\frac{n-1}{n}\right)=0\,, \qquad (25)$$

welche auch sehr leicht mittelst einer einfachen Eigenthümlichkeit der Bernoullischen Funktion verificirt werden kann.

B.

Die Euler'sche Funktion.

1. Wir gehen hier von der Sekanten-Gleichheit:

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + E_1 \frac{x^2}{1.2} + E_2 \frac{x^4}{1.2.3.4} + E_3 \frac{x^6}{1.2....6} + \cdots$$

aus, die nach Mittheilung II., Gl. (22), für alle Werthe, so numerisch kleiner denn $\frac{\pi}{2}$ sind, Bestand hat. — Ersetzt man hier cos x durch imaginäre Exponentialgrössen, vertauscht hierauf x durch xi, wo i die imaginäre Einheit vorstellt; so gelangt man auf:

$$\frac{2e^x}{1+e^{2x}} = 1 - E_1 \frac{x^2}{1.2} + E_2 \frac{x^4}{1.2.3.4} - E_3 \frac{x^6}{1.2....6} + \cdots, \qquad (1)$$

die für dieselben Werthe von x wie die vorhergehende identisch Bestand hat.

Anderseits hat man durch wirkliche Summation:

$$1 - e^x + e^{2x} - e^{3x} + \ldots - e^{(2m-1)x} = \frac{1-e^{2mx}}{1+e^x}$$

$$= \left(e^{-\frac{x}{2}} - e^{\left(2m-\frac{1}{2}\right)x}\right) \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+e^x}, \qquad (2)$$

wie auch nach der bekannten Exponentialreihe für alle Werthe von x die Gleichheit:

$$e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\left(2m-\frac{1}{2}\right)x} =$$

$$-\left[2m - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right]x - \left[\left(2m-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2^2}\right]\frac{x^2}{1.2}$$

$$-\left[\left(2m-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2^3}\right]\frac{x^3}{1.2.3} - \left[\left(2m-\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{2^4}\right]\frac{x^4}{1.2.3.4}$$

$$-\left[\left(2m-\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{2^5}\right]\frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{u. s. w.}$$

Wird nun in Gleichheit (1) x durch $\frac{x}{2}$ ersetzt und multiplizirt man dann die sich ergebende unendliche Reihe mit der so eben für $e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\left(2m-\frac{1}{2}\right)x}$

aufgestellten, immer convergenten Reihe, so ist im Produkte der Coefficient von x^{2k} folgender Ausdruck:

$$-\frac{1}{2}\left[\left(2m-\frac{1}{2}\right)^{2k}-\frac{1}{2^{2k}}\right]\frac{1}{1.2.3\ldots 2k}+$$

$$+\frac{1}{2^3}\left[\left(2m-\frac{1}{2}\right)^{2k-2}-\frac{1}{2^{2k-2}}\right]\frac{E_1}{1.2.1.2\ldots.2k-2}$$

$$-\frac{1}{2^5}\left[\left(2m-\frac{1}{2}\right)^{2k-4}-\frac{1}{2^{2k-4}}\right]\frac{E_2}{1.2.3.4.1.2.3\ldots(2k-4)}+\ldots.$$

$$\ldots.\frac{(-1)^k}{2^{2k-1}}\left[\left(2m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2^2}\right]\frac{E_{k-1}}{1.2.3.4\ldots 2k-2.1.2},$$

und der von x^{2k+1} folgender:

$$-\frac{1}{2}\left[\left(2m-\frac{1}{2}\right)^{2k+1}+\frac{1}{2^{2k+1}}\right]\frac{1}{1.2.3\ldots(2k+1)}+$$

$$+\frac{1}{2^3}\left[\left(2m-\frac{1}{2}\right)^{2k-1}+\frac{1}{2^{2k-1}}\right]\frac{E_1}{1.2.1.2\ldots(2k-1)}$$

$$-\frac{1}{2^5}\left[\left(2m-\frac{1}{2}\right)^{2k-3}+\frac{1}{2^{2k-3}}\right]\frac{E_2}{1.2.3.4.1.2.3\ldots(2k-3)}+\ldots..$$

$$\ldots..\frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+1}}\left[\left(2m-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]\frac{E_k}{1.2.3\ldots 2k.1}.$$

Werden ferner die 2m Glieder linkerhand des Gleichheitszeichens in (2) ebenfalls nach Potenzen von x aufgelöst; so bietet die Summe dieser 2m Reihen als Coefficienten von x^{2k} den Ausdruck

$$-\frac{1}{1.2.3\ldots 2k}\left(1^{2k}-2^{2k}+3^{2k}-4^{2k}+\ldots+(2m-1)^{2k}\right)$$

und als Coefficienten von x^{2k+1} folgenden dar:

$$-\frac{1}{1.2.3\ldots(2k+1)}\left(1^{2k+1}-2^{2k+1}+3^{2k+1}-4^{2k+1}+\ldots+(2m-1)^{2k+1}\right)$$

Weil endlich beide Reihen, deren allgemeine Glieder wir soeben aufgestellt haben, (die eine Reihe ist die Entwicklung des Ausdruckes rechterhand, die andere die des Ausdruckes linkerhand der oben durch (2) angedeuteten Gleichheit) für alle Werthe von x, die innerhalb $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ fallen, gegen endliche Grenzen convergiren und einander gleich sind, — so bestehen auch folgende Gleichheiten unter den einander entsprechenden Coefficienten:

$$\{1^{2k} - 2^{2k} + 3^{2k} - \ldots + (2m-1)^{2k}\}\ 2^{2k+1}$$

$$= (4m-1)^{2k} - 1 - \binom{2k}{2} E_1\left[(4m-1)^{2k-2} - 1\right]$$

$$+ \binom{2k}{4} E_2\left[(4m-1)^{2k-4} - 1\right] - \ldots.$$

$$\ldots. (-1)^{k-1} \binom{2k}{2k-2} E_{k-1}\left[(4m-1)^2 - 1\right],$$

$$\{1^{2k+1} - 2^{2k+1} + 3^{2k+1} - \ldots + (2m-1)^{2k+1}\}\ 2^{2k+2}$$

$$= (4m-1)^{2k+1} + 1 - \binom{2k+1}{2} E_1\left[(4m-1)^{2k-1} + 1\right]$$

$$+ \binom{2k+1}{4} E_2\left[(4m-1)^{2k-3} + 1\right] - \ldots.$$

$$\ldots. (-1)^k \binom{2k+1}{2k} E_k\left[(4m-1) + 1\right].$$

2. Behufs grösserer Vereinfachung der soeben gewonnenen Ergebnisse, sei zuerst die Abkürzungsgleichung

$$U_k = 1^k - 2^k + 3^k - 4^k + \ldots. + (2m-1)^k \qquad (3)$$

festgestellt, wodurch ersteres besagter Ergebnisse folgendermassen gestellt werden kann:

$$2^{2k+1} U_{2k} = (4m-1)^{2k} - \binom{2k}{2} E_1 (4m-1)^{2k-2}$$

$$+ \binom{2k}{4} E_2 (4m-1)^{2k-4} - \ldots. (-1)^{k-1} \binom{2k}{2k-2} E_{k-1} (4m-1)^2$$

$$+ (-1)^{k-1} \left\{ - \binom{2k}{2} E_{k-1} + \binom{2k}{4} E_{k-2} - \binom{2k}{6} E_{k-3} \ldots \right.$$

$$\left. \ldots (-1)^{k-1} \binom{2k}{2k-3} E_1 + (-1)^k \binom{2k}{2k} \right\}.$$

Bedenkt man die in Mittheilung II., pag. 25 aufgestellten Recursionen unter den Euler'schen Zahlen $E_1, E_2, E_3, \ldots.$, so hat man auch

$$2^{2k+1} U_{2k} = (4m-1)^{2k} - \binom{2k}{2} E_1 (4m-1)^{2k-2}$$

$$+ \binom{2k}{4} E_2 (4m-1)^{2k-4} - \ldots.$$

$$\ldots. (-1)^{k-1} \binom{2k}{2k-2} E_{k-1} (4m-1)^2 + (-1)^k \binom{2k}{2k} E_k. \qquad (4)$$

Letzteres besagter Ergebnisse kann zunächst folgendermassen dargestellt werden:

$$2^{2k+2}U_{2k+1} = (4m-1)^{2k+1} - \binom{2k+1}{2} E_1 (4m-1)^{2k-1}$$
$$+ \binom{2k+1}{4} E_2 (4m-1)^{2k-3} - \ldots (-1)^k \binom{2k+1}{2k} E_k (4m+1)$$
$$+ 1 - \binom{2k+1}{2} E_1 + \binom{2k+1}{4} E_2 - \ldots (-1)^k \binom{2k+1}{2k} E_k,$$

und wenn aus der im 42. Bande des Crelle'schen Journals mitgetheilten Abhandlung über die Bernoullische Funktion, die Gleichung (38″) daselbst beachtet wird, so ist der auf der zweiten Zeile in unmittelbar vorher aufgestellter Gleichung vorkommende Ausdruck gleich $(-1)^{k-1}T_{k+1}$, wo T_{k+1} der $(k+1)$te Tangentencoefficient ist, d. h. man hat:

$$T_{k+1} = \frac{2^{2k+2}(2^{2k+2}-1)}{2k+2} B_{k+1},$$

wo B_{k+1} die $(k+1)$te Bernoullische Zahl ist. — Alles dieses festgestellt nimmt die vorige Bestimmungsgleichung folgende Form an:

$$2^{2k+2}U_{2k+1} = (4m-1)^{2k+1} - \binom{2k+1}{2} E_1 (4m-1)^{2k-1}$$
$$+ \binom{2k+1}{4} E_2 (4m-1)^{2k-3} - \ldots (-1)^k \binom{2k+1}{2k} E_k (4m-1)$$
$$+ (-1)^k \frac{2^{2k+2}(2^{2k+2}-1)}{2k+2} B_{k+1}. \qquad (5)$$

3. Nachdem die Gleichungen (4 und 5) gewonnen sind, gehen wir zum eigentlichen Gegenstande dieses Abschnittes, zur Einführung der Euler'schen Funktion über, wobei wir uns analoger Bezeichnungen und Redeweisen, wie bei der Bernoullischen Funktion bedienen werden.

Es sei:

$$1^m - 2^m + 3^m - 4^m + \ldots + (2x-1)^m = E(x). \qquad (I)$$

Stellen wir nun durch $E''(x)$ den Fall dar, wenn m ganz, positiv und gerad, also von der Form 2m ist, ebenso durch $E'(x)$ den andern Fall, wenn m ebenfalls ganz, positiv, aber ungerade und der Form $2m+1$ ist; — so haben wir dem Vorausgeschickten zufolge die Bestimmungsgleichungen

$$2^{2m+1}E''(x) = (4x-1)^{2m} - \binom{2m}{2}(4x-1)^{2m-2}E_1$$
$$+\binom{2m}{4}(4x-1)^{2m-4}E_2 - \ldots(-1)^{m-1}\binom{2m}{2m-2}(4x-1)^2 E_{m-1}$$
$$+(-1)^m\binom{2m}{2m}E_m, \qquad \text{(II)}$$

$$2^{2m+2}E'(x) = (4x-1)^{2m+1} - \binom{2m+1}{2}(4x-1)^{2m-1}E_1$$
$$+\binom{2m+1}{4}(4x-1)E_2 - \ldots(-1)^m\binom{2m+1}{2m}(4x-1)E_m$$
$$+(-1)^m\frac{2^{2m+2}(2^{2m+2}-1)}{2m+2}B_{m+1} \qquad \text{(III)}$$

für alle ganzen und positiven Werthe von x gefunden.

Erklärt man aber x als allgemeine variable Grösse, die also aller gedenkbaren Zahlenwerthe fähig ist, so nenne ich die betreffenden Ausdrücke rechterhand der Gleichheitszeichen in (II. und III.) wenn sie bezüglich durch 2^{2m+1} und 2^{2m+2} dividirt werden, die Eulerschen Funktionen bezüglich vom geraden und ungeraden Grade, und wenn in (II.) 2m durch m, oder in (III.) 2m+1 durch m ersetzt wird, wo denn diese beiden Gleichheiten in folgende Eine zusammenfallen:

$$2^{m+1}E(x) = (4x-1)^m - \binom{m}{2}(4x-1)^{m-2}E_1 + \binom{m}{4}(4x-1)^{m-4}E_2$$
$$-\binom{m}{6}(4x-1)^{m-6}E_3 + \ldots. \qquad \text{(IV)}$$

und der hier stehende Ausdruck rechts nach den in (II. und III.) festgestellten Formen abzubrechen ist; so nenne ich die durch E(x) angezeigte Funktion von x einfach: die Euler'sche Funktion von x, die im Falle eines ganzen positiven Werthes von x auch durch Gleichung (I) näher bestimmt wird.

Einige Eigenthümlichkeiten dieser Euler'schen Funktionen E'' (x), E' (x), E (x), wie sie durch die Gleichheiten (II., III. und IV.) definirt sind, werden wir erst dann mittheilen, nachdem wir vorher Einiges über den Zusammenhang derselben mit den analog benannten Bernoullischen Funktionen vorgeführt haben werden.

4. Nach der bekannten Bedeutung und Bezeichnung der Bernoullischen Funktion nämlich

$$B(x) = 1^m + 2^m + 3^m + 4^m + \ldots + (x-1)^m, \qquad (6)$$

hat man beachtend die Feststellung in (I.) folgende Gleichheit:

$$E(x) = B(2x) - 2^{m+1} B(x),$$

wo der Exponent m gerad oder ungerad sein kann, also die hier vorkommenden Bernoullischen und Eulerschen Funktionen zugleich geraden oder zugleich ungeraden Grades sind. — Ersetzt man hier m durch 2m, wodurch zunächst

$$E''(x) = B''(2x) - 2^{2m+1} B''(x)$$

erhalten wird, so hat man beachtend die Gleichheit:

$$B''(2x) = 2^{2m}\left\{B''(x) + B''\left(x+\frac{1}{2}\right)\right\}, \quad *)$$

folgenden Zusammenhang:

$$E''(x) = 2^{2m}\left\{B''\left(x+\frac{1}{2}\right) - B''(x)\right\}. \qquad (V)$$

Stellt man aber m der Form 2m+1, also die betreffenden Bernoullischen und Eulerschen Funktionen zugleich von ungeradem Grade fest, wodurch ebenfalls zunächst die Gleichheit

$$E'(x) = B'(2x) - 2^{2m+2} B'(x)$$

erhalten wird; so bietet diese, beachtend:

$$B'(2x) = 2^{2m+1}\left\{B'(x) + B'\left(x+\frac{1}{2}\right)\right\} + \frac{(-1)^m(2^{2m+2}-1)}{2m+2} B_{m+1}, \quad **)$$

folgenden Zusammenhang dar:

$$E'(x) = 2^{2m+1}\left\{B'\left(x+\frac{1}{2}\right) - B'(x)\right\} + \frac{(-1)^m(2^{2m+2}-1)}{2m+2} B_{m+1} \qquad (VI)$$

wo B_{m+1} die (m+1)te Bernoullische Zahl ist.

Theils zur Verifizirung dieser Ergebnisse, theils auch um eine beachtenswerthe Bestimmung zu erzielen, setzen wir im Vorausgeschickten $x = \frac{1}{4}$. Die Gleichheiten (II. und III.) bieten bei dieser Verfügung über x:

$$E''\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{(-1)^m}{2^{2m+1}} E_m, \quad E'\left(\frac{1}{4}\right) = (-1)^m \frac{2^{2m+2}-1}{2m+2} B_{m+1}, \qquad (7)$$

---

*) Siehe meine Schrift: Die Jakob Bernoullische Funktion, S. 23.

**) Ebendaselbst: S. 28.

wo nunmehr bei derselben Verfügung über x die Gleichheiten (V und VI) übergehen in:

$$(-1)^m E_m = 2^{4m+1}\left[B''\left(1-\frac{1}{4}\right)-B''\left(\frac{1}{4}\right)\right],$$

$$0 = \qquad B'\left(1-\frac{1}{4}\right)-B'\left(\frac{1}{4}\right).$$

Zieht man eine der fundamentalen Eigenschaften der Bernoullischen Funktion zu, nämlich

$$B(1-x)+(-1)^m B(x) = 0, \quad *) \tag{8}$$

mittelst der die Richtigkeit der zweiten vorangehender Gleichungen unmittelbar erkannt wird; so gewinnt man aus der erstern dieser Gleichungen folgende angekündigte Bestimmung:

$$B''\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{4m+2}} E_m . \tag{9}$$

Auch einige, von der Bernoullischen Funktion independente Eigenthümlichkeiten der Euler'schen Funktionen $E''(x)$ und $E'(x)$ wollen wir hier noch vorführen.

Wenn in (V und VI) x durch $x+\frac{1}{2}$ ersetzt und hierauf bezüglich zum ursprünglichen addirt wird, so gewinnt man folgende zwei Gleichheiten:

$$E''\left(x+\frac{1}{2}\right)+E''(x) = 2^{2m}\left\{B''(1+x)-B''(x)\right\},$$

$$E'\left(x+\frac{1}{2}\right)+E''(x) = 2^{2m+1}\left\{B'(1+x)-B'(x)\right\}$$

$$+\frac{(-1)^m}{m+1}(2^{2m+2}-1)\,B_{m+1},$$

die wegen:

$$B(1+x)-B(x) = x^m , \tag{10}$$

folgende darbieten:

$$E''\left(\frac{1}{2}+x\right)+E''(x) = (2x)^{2m} , \tag{VII}$$

$$E'\left(\frac{1}{2}+x\right)+E'(x) = (2x)^{2m+1}+\frac{(-1)^m}{m+1}(2^{2m+2}-1)\,B_{m+1}. \tag{VIII}$$

*) Meine Schrift: Die Jakob Bernoullische Funktion, Seite 18.

Mit Zuziehung derselben Gleichheiten (V und VI) gelangt man auch, und zwar gleichfalls mit Zuziehung der fundamentalen Eigenthümlichkeiten der Bernoullischen Funktion B(x) auf folgende Gleichheiten:

$$\left.\begin{aligned} E''(x) + E''(-x) &= (2x)^{2m}, \\ E'(x) - E'(-x) &= (2x)^{2m+1} \end{aligned}\right\}. \qquad (IX)$$

Wird ferner in Gleichheit (VII) x durch $-x$ ersetzt, und vom Ergebniss die erstere dieser eben aufgestellten subtrahirt, verbindet man hierauf die Gleichheit (VIII) in ähnlicher Weise mit der zweiten dieser eben aufgestellten Gleichheiten, wo lediglich die Subtraktion mit einer Addition vertauscht wird: so ergeben sich noch folgende zwei Gleichheiten:

$$E''\left(\frac{1}{2}-x\right) - E''(x) = 0, \qquad (X)$$

$$E'\left(\frac{1}{2}-x\right) + E'(x) = \frac{(-1)^m}{m+1}(2^{2m+2}-1)\,B_{m+1}, \qquad (XI)$$

deren Richtigkeit unmittelbar aus den Begriffsgleichungen (II. und III.) entnommen werden kann; daher man sie als Verificationen der vorausgeschickten Ergebnisse vorliegender Nr. ansehen kann.

Ferner bieten diese letzten Ergebnisse, mit denen in (VII. und VIII.) verglichen, folgende Gleichheiten dar:

$$E''\left(\frac{1}{2}+x\right) + E''\left(\frac{1}{2}-x\right) = (2x)^{2m},$$

$$E'\left(\frac{1}{2}+x\right) - E'\left(\frac{1}{2}-x\right) = (2x)^{2m+1},$$

welche, wie auch die in (IX.) kürzer und allgemeiner, wie folgt, gestellt werden können:

$$\left.\begin{aligned} E(x) + (-1)^m E(-x) &= (2x)^m \\ E\left(\frac{1}{2}+x\right) + (-1)^m E\left(\frac{1}{2}-x\right) &= (2x)^m \end{aligned}\right\}. \qquad (XII)$$

Endlich zieht man aus der zweiten dieser Gleichheiten auch folgende:

$$E(1+x) + (-1)^m E(-x) = (2x+1)^m; \qquad (XIII)$$

und durch Subtraction der ersten in (XII) von dieser hat man:

$$E(1+x) - E(x) = (2x+1)^m - (2x)^m,$$

deren Richtigkeit aus der ersten Begriffsgleichung (I.) leicht zu verificiren ist.

5. Die Euler'schen Funktionen $E''(x)$ und $E'(x)$ sind gleichwie analoge Bernoull'sche, und zwar mit Hülfe dieser, durch trigonometrische Funktionen von x darstellbar.

Unterlegt man zu diesem Zwecke die Gleichheiten (V und VI) vorangehender Nr., wie die in (1 und 2) in der bereits citirten Abhandlung aus dem 42. Bande des Crelle'schen Jonrnals, so erhält man sehr bald:

$$E''(x) = \frac{2(-1)^m}{\pi^{2m+1}} 1.2.3,..2m \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2m+1}} \sin(2k-1)2\pi x, \quad \text{(XIV)}$$

$$E'(x) = \frac{2(-1)^{m+1}}{\pi^{2m+2}} 1.2.3...(2m+1) \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2m+2}} \cos(2k-1)2\pi x + E'\left(\frac{1}{4}\right), \quad \text{(XV)}$$

wo $E'\left(\frac{1}{4}\right)$ nach der zweiten, in (7) hier aufgestellten Gleichungen durch die $(m+1)$te Bernoullische Zahl ersetzt werden kann.

Diese Ergebnisse bestehen jedoch nur für die innerhalb o und $\frac{1}{2}$ fallenden Werthe von x, die Grenze mitbegriffen*), wobei m jedes ganzen positiven Werthes fähig ist.

Man findet mit Hülfe dieser Ergebnisse

$$\left.\begin{aligned} E''(o) &= o,\ E''\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{(-1)^m}{2^{2m+1}} E_m,\ E''\left(\frac{1}{2}\right) = o, \\ E'(o) &= o,\ E'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{(-1)^m}{2m+2} (2^{2m+2} - 1) B_{m+1}, \\ E'\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{(-1)^m}{m+1} (2^{2m+2} - 1) B_{m+1}, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

die theils mit Ergebnissen vorangehender Nr. völlig übereinstimmen, theils aber auch aus denselben gefolgert werden können.

---

*) Die unterlegten, oben citirten Gleichheiten aus dem Crelle'schen Journal bestehen nur für Werthe von $x=o$ bis $x=1$; wenn in denselben nun x auch durch $x+\frac{1}{2}$ ersetzt wird und sie hierauf mit jenen unmittelbaren Ergebnissen combinirt werden, so bestehen die so erzielten Ergebnisse, wie es die in (XIV und XV) sind, lediglich von $x=o$ bis $x=\frac{1}{2}$, wie oben festgestellt worden ist.

Der Verfasser behält sich vor, in einem nächsten Hefte auf diesen Gegenstand zurückzukommen und namentlich einige der interessantesten Eigenschaften der Funktion E(x) vorzuführen. Für jetzt mag es genügen, ohne alle Beweisführung folgendes nicht uninterressante Resultat mitgetheilt zu haben:

$$E'\left(\frac{1}{2n}\right)+E'\left(\frac{2}{2n}\right)+E'\left(\frac{3}{2n}\right)+\ldots+E'\left(\frac{n-1}{2n}\right)=$$

$$=(-1)^m(n-1)\frac{2^{2m+2}-1}{2m+2}B_{m+1}. \quad \text{(XVI)}$$

X.

Ueber die Integration der partiellen Differenzialgleichung zweiter Ordnung $s^2 - rt = f(p, q)$.

Nach dem dritten Bande meiner Integralrechnung, der Nr. 717 und dem Eingange der Nr. 718 wird die partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung:

$$s^2 - rt = M^2, \qquad (a)$$

wo M eine Funktion lediglich von p und q ist, eine Integralgleichung der ersten Ordnung zulassen, wenn folgende drei partielle Differenzialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{dq}{dx} + p\frac{dq}{dz} = M, \quad \frac{dq}{dy} + q\frac{dq}{dz} = M\frac{dq}{dp}, \quad 2\frac{dq}{dz} = \frac{dM}{dp} + \frac{dM}{dq}\frac{dq}{dp} \qquad (b)$$

zugleich bestehen können, wo die durch M angedeutete Funktion von p und q in allen drei Gleichungen entweder im positiven oder negativen Sinne auftritt.

Die Buchstaben p, q, r, s, t treten in den von den meisten Analysten gebrauchten Bedeutungen auf, d. h. wenn z irgend eine Funktion von x und y vorstellt, so ist:

$$p = \frac{dz}{dx}, \; q = \frac{dz}{dy}, \; r = \frac{d^2z}{dx^2}, \; s = \frac{d^2z}{dx\,dy}, \; t = \frac{d^2z}{dy^2}.$$

Gibt es nun einen Zusammenhang zwischen q, p, z, y, x aus dem q, wie die partiellen Differenzialquotienten von q nach p, z, y, x gezogen und in (2) eingeführt, diesen genügt, so stellt eben dieser Zusammenhang eine Integralgleichung erster Ordnung zu (a) vor. In der erwähnten Nr. 718 und den darauffolgenden Nrn. ist der besondere Fall erledigt worden, wo M eine homogene Funktion zweiten Grades von p und q vorstellt; im Vorliegenden wird M in der ganzen Allgemeinheit als eine Funktion von p und q auftreten und, unter dieser allgemeinern Voraussetzung, die Integrabilität der partiellen Differen-

zialgleichung (a) durch eine Integralgleichung erster Ordnung discutirt werden.

1. Da, wie schon erwähnt, das Vorhandensein einer Integralgleichung erster Ordnung zu (a) an die Möglichkeit eines simultanen Bestandhabens der Gleichung in (b) gebunden ist, so gehen wir, wie bei manchem ähnlichen Anlasse, von der Realität dieser Annahme aus, ziehen aus besagten Gleichungen drei der partiellen Differenzialquotienten $\frac{dq}{dx}, \frac{dq}{dy}, \frac{dq}{dz}, \frac{dq}{dp}$, z. B. die drei ersten, und führen diese in folgende durch totale Differenziation von q sich ergebende Gleichung:

$$dq = \frac{dq}{dx}dx + \frac{dq}{dy}dy + \frac{dq}{dz}dz + \frac{dq}{dp}dp \qquad (1)$$

ein; so muss diese, die die fünf Variabeln x, y, z, p, q und den ebenfalls als Variable zu behandelnden partiellen Differenzialquotienten $\frac{dq}{dp}$ enthalten wird, durch ein System zweier Gleichungen unter diesen sechs Variabeln integrabel erkannt werden, damit das Eliminationsergebniss von $\frac{dq}{dp}$ aus denselben die verlangte eine Integralgleichung erster Ordnung darbiete.

Diese Untersuchung wird bedeutend vereinfacht, wenn M unter quadratischer Form angenommen, d. h. wenn

$$M = N^2 \qquad (2)$$

gesetzt wird; man zieht alsdann aus den Gleichungen (b)

$$\frac{dq}{dx} = N^2 - pNL, \quad \frac{dq}{dy} = N^2 w' - qNL, \quad \frac{dq}{dz} = NL,$$

wo der Kürze wegen

$$w' = \frac{dq}{dp} \text{ und } L = \frac{dN}{dp} + w'\frac{dN}{dq} \qquad (3)$$

gesetzt worden ist, und die obige Gleichung (1) geht über in folgende:

$$dq - w'dp - (N^2 - pNL)dx - (N^2 w' - qNL)dy - NLdz = o, \qquad (1')$$

welche die sechs Variabeln q, p, x, y, z, w' enthält, und die in Beziehung auf Integrabilität durch ein System zweier Gleichungen unter diesen Variabeln nach der allgemeinen Bedingungsgleichung (11) (Ir. Nr. 656) zu untersuchen ist.

Vergleicht man diese Differenzialgleichung (1') mit der allgemeinen (Ir. Nr. 652), ersetzt die Variabeln $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ bezüglich durch q, p, x, y, z, w', so ist:

$X^{(1)}=1$, $X^{(2)}=-w'$, $X^{(3)}=-(N^2-pNL)$, $X^{(4)}=-(N^2w'-qNL)$,
$X^{(5)}=-NL$, $X^{(6)}=0$,

und stellt man die zweigliedrigen Symbole nach ihrer Begriffsgleichung (ζ) (Ir. Nr. 653) her, so ist:

$$(1,2)=0,\ (1,3)=2N\frac{dN}{dq}-p\left(L\frac{dN}{dq}+N\frac{dL}{dq}\right),$$

$$(1,4)=2w'N\frac{dN}{dq}-NL-q\left(L\frac{dN}{dq}+N\frac{dL}{dq}\right),\ (1,5)=N\frac{dL}{dq}+L\frac{dN}{dq},$$

$$(1,6)=0;\ (2,3)=2N\frac{dN}{dp}-NL-p\left(L\frac{dN}{dp}+N\frac{dL}{dp}\right),$$

$$(2,4)=2w'N\frac{dN}{dp}-q\left(L\frac{dN}{dp}+N\frac{dL}{dp}\right),\ (2,5)=L\frac{dN}{dp}+N\frac{dL}{dp},$$

$$(2,6)=-1;\ (3,4)=0,\ (3,5)=0,\ (3,6)=pN\frac{dN}{dq};\ (4,5)=0,$$

$$(4,6)=-N^2+qN\frac{dN}{dq};\ (5,6)=-N\frac{dN}{dq}.$$

Stellt man nun die dreigliedrigen Symbole nach der Begriffsgleichung (ϑ) der Nr. 656, so hat man:

$$(1,2,3)=NL-pL^2-pN\left(\frac{dL}{dp}+w'\frac{dL}{dq}\right),$$

$$(1,2,4)=w'NL-qL^2-qN\left(\frac{dL}{dp}+w'\frac{dL}{dq}\right),$$

$$(1,2,5)=L^2+N\left(\frac{dL}{dp}+w'\frac{dL}{dq}\right),$$

$$(1,2,6)=-1,$$

$$(1,3,4)=N^2L(pL-N)+N^2\left(L\frac{dN}{dq}-N\frac{dL}{dq}\right)(q-pw'),$$

$$(1,3,5)=-N^2\left(L\frac{dN}{dq}-N\frac{dL}{dq}\right),$$

$$(1,3,6)=pN\frac{dN}{dq},$$

$$(1,4,5)=N^2L^2-N^2\left(L\frac{dN}{dq}-N\frac{dL}{dq}\right)w',$$

$$(1,4,6)=-N^2+qN\frac{dN}{dq},$$

$$(1,5,6)=-N\frac{dN}{dq}.$$

Die oben erwähnte allgemeine Bedingungsgleichung (11) bietet gegenwärtig die drei folgenden dar:

$$(1,2,3)\,(1,4,5) - (1,2,4)\,(1,3,5) + (1,2,5)\,(1,3,4) = 0,$$
$$(1,2,3)\,(1,4,6) - (1,2,4)\,(1,3,6) + (1,2,6)\,(1,3,4) = 0,$$
$$(1,2,3)\,(1,5,6) - (1,2,5)\,(1,3,6) + (1,2,6)\,(1,3,5) = 0.$$

Von diesen geht die dritte in $-N^3\frac{dL}{dq} = 0$ über, und weil N verschieden von Null vorausgesetzt wird, geht diese dritte über in:

$$\frac{dL}{dq} = 0.$$

Bei der Annahme, dass diese Statt findet, geht die zweite über in $pN^3\frac{dL}{dp} = 0$, folglich reducirt sie sich auf:

$$\frac{dL}{dp} = 0.$$

Nimmt man an, dass auch diese Statt findet, so wird die erste obiger drei Bedingungsgleichungen identisch realisirt: auch verbleiben die Bedingungen $\frac{dL}{dp} = 0$, $\frac{dL}{dq} = 0$, d. h. die Differenzialgleichung (3) bietet ein System zweier Integralgleichungen dar, wenn, beachtend die Bedeutung von L aus Gleichung (3), folgende Gleichungen identisch bestehen:

$$\frac{d^2N}{dp^2} + w'\frac{d^2N}{dp\,dq} = 0, \quad \frac{d^2N}{dp\,dq} + w'\frac{d^2N}{dq^2} = 0. \qquad (4)$$

Diese können unter Berücksichtigung der Unabhängigkeit der Grösse N von w' nur bestehen, wenn folgende drei Gleichungen:

$$\frac{d^2N}{dp^2} = 0, \quad \frac{d^2N}{dp\,dq} = 0, \quad \frac{d^2N}{dq^2} = 0$$

simultan Bestand haben, d. h. wenn

$$N = a + bp + cq$$

ist, wo a, b, c Constante sind. Berücksichtigt man auch die Gleichung (2), so ist

$$M = (a + bp + cq)^2;$$

woraus hervorgeht, dass für die partielle Differenzialgleichung

$$s^2 - rt = (a + bp + cq)^4$$

mittelst Integration der Differenzialgleichung (1'), die nun folgende Form annimmt:

$$dq - w'dp - (a + bp + cq)\,[a + c\,(q - pw')]\,dx$$
$$-(a + bp + cq)\,[aw' - b(q - pw')]\,dy - (a + bp + cq)\,(b + aw')\,dz = 0,$$

die eine ihr entsprechende Integralgleichung erster Ordnung erhalten wird, womit wir uns in folgender Nr. ausschliesslich befassen werden.

2. Vergleicht man die unmittelbar aufgestellte Differenzialgleichung mit der allgemeinen (Ir. X, §. II), ersetzt dann die Variabeln x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 daselbst bezüglich durch q, p, x, y, z, w', stellt der Kürze wegen die Gleichungen

$$N = a + bp + cq,\quad L = b + cw',\quad P = q - pw' \qquad (5)$$

fest, so ist

$$X^{(1)} = 1,\quad X^{(2)} = -w',\quad X^{(3)} = -N(a+cP),\quad X^{(4)} = -N(aw'-bP),$$
$$X^{(5)} = -NL,\quad X^{(6)} = 0.$$

Aus diesen zieht man:

$(1,2) = 0$, $(1,3) = cN + c(a+cP)$, $(1,4) = -bN + c(aw'-bP)$,
$(1,5) = cL$, $(1,6) = 0$, $(2,3) = -cw'N + b(a+cP)$,
$(2,4) = bw'N + b(aw'-bP)$, $(2,5) = bL$, $(2,6) = -1$, $(3,4) = 0$,
$(3,5) = 0$, $(3,6) = cpN$, $(4,5) = 0$, $(4,6) = -(a+bp)N$, $(5,6) = -cN$;

und aus diesen:

$(1,2,3) = L(a+cP)$, $(1,2,4) = L(aw'-bP)$, $(1,2,5) = L^2$, $(1,2,6) = -1$,
$(1,3,4) = -aLN^2$, $(1,3,5) = -cLN^2$, $(1,3,6) = cpN$,
$(2,3,4) = aw'LN^2$, $(2,3,5) = cw'LN^2$, $(2,3,6) = -(a+cq)N$.

Diesem nach gehen die drei Differenzialgleichungen (12) (Ir. Nr. 657) über in:

$$L(a+cP)\,dq + aw'LN^2dy + cw'LN^2dz - (a+cq)N\,dw' = 0,$$
$$L(a+cP)\,dp + aLN^2dy + cLN^2dz - cpN\,dw' = 0,$$
$$L(a+cP)\,dx + L(aw'-bP)\,dy + L^2dz - dw' = 0,$$

multiplicirt man die zweite mit w' und subtrahirt sie von der ersten, so erhält man nach Unterdrückung des gemeinsamen Faktors $a+cP$ folgende:

$$L(dq - w'dp) - N\,dw' = 0;$$

multiplicirt man weiter die zweite mit b, die erste mit c und nimmt ihre Summe

$$L(a+cP)(b\,dp + c\,dq) + L^2N^2(a\,dy + c\,dz) - cN^2dw' = 0;$$

multiplicirt man endlich die erste mit 1, die zweite mit $-w'$ und die dritte mit $-N(a+cP)$, nimmt dann die Summe derselben, so gelangt man nach Unterdrückung des gemeinsamen Faktors $L(a+cP)$ auf die Ausgangs vorangehender Nr. aufgestellte Differenzialgleichung, mit deren Integration durch ein System dreier Gleichungen wir uns zu befassen haben. Diesem nach haben wir uns mit der Integration folgender drei Differenzialgleichungen zu beschäftigen:

$$\left.\begin{aligned} &L(dq - w'dp) - N\,dw' = o, \\ &L(a+cP)\frac{dN}{N^2} + L^2(a\,dy + c\,dz) - c\,dw' = o, \\ &dq - w'dp - N\{(a+cP)\,dx + (aw' - bP)\,dy + L\,dz\} = o. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit c, bedenkt, dass nach der Gleichung (7):

$$cw' = L - b, \text{ also } c\,dw' = dL,$$

so geht sie über in

$$L(c\,dq + b\,dp - L\,dp) - N\,dL = o$$

oder

$$L(dN - L\,dp) - N\,dL = o,$$

oder

$$L\,dN - N\,dL = L^2 dp$$

oder

$$\frac{L\,dN - N\,dL}{L^2} = dp$$

mithin durch Integration

$$\frac{N}{L} = p + \alpha, \quad (7)$$

wo α die Integrationsconstante ist. Ersetzt man noch N und L gemäss den Gleichungen (5), so ergibt sich die gleichbedeutende:

$$a + cP = \alpha L. \quad (7')$$

Führt man dieses Ergebniss in die zweite der Differenzialgleichungen (6) ein, ersetzt noch $c\,dw'$ durch dL, so geht sie, wenn man durch L^2 dividirt, über in:

$$\alpha\frac{dN}{N^2} + a\,dy + c\,dz - \frac{dL}{L^2} = o,$$

die integrirt, folgende darbietet:

$$-\frac{\alpha}{N} + ay + cz + \frac{1}{L} = \beta, \quad (8)$$

wo β eine zweite Integrationsconstante ist.

Multiplicirt man ferner die dritte der Gleichungen (6) mit c, ersetzt in derselben cw' durch L—b und berücksichtigt die Integralgleichung (7'), so geht sie über in:

$$c\,dq + b\,dp - L\,dp - N\{\alpha c L\,dx + (a - \alpha b)L\,dy + cL\,dz\} = o,$$

oder

$$dN - L\,dp - LN\{\alpha c\,dx + (a - \alpha b)\,dy + c\,dz\} = o,$$

es ist aber nach einer eben gewonnenen Gleichung:

$$dN - L\,dp = \frac{N}{L}\,dL\,,$$

daher hat man:

$$\frac{dL}{L^2} - \left\{\alpha c\,dx + (a - \alpha b)\,dy + c\,dz\right\} = o\,,$$

die integrirt, folgende darbietet:

$$\frac{1}{L} + \alpha c x + (a - \alpha b)y + c z = \gamma\,, \qquad (9)$$

wo γ die dritte Integrationsconstante ist.

Verfügt man über die drei Integrationsconstanten α, β, γ dergestalt, dass sie respective die Werthe von p, q, w' vorstellen, falls x=o, y=o, z=o wird, so gehen die gewonnenen drei Integralgleichungen beachtend die Gleichungen (5) in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{\alpha - (a+b\alpha+c\beta)(ay+cz)}{1 + (a+b\alpha+c\beta)(by-cx)}\,,\\ q &= \frac{\beta + (a+b\alpha+c\beta)(ax+bz)}{1 + (a+b\alpha+c\beta)(by-cx)}\,,\\ b+cw' &= \frac{b+c\gamma}{1-c[a+c(\beta-\alpha\gamma)]x+c[-a\gamma+b(\beta-\alpha\gamma)]y-c(b+c\gamma)z} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Mittelst dieser Gleichungen geht die Ausgangs vorangehender Nr. aufgestellte Differenzialgleichung, falls noch α, β, γ als Variable behandelt werden, in folgende über:

$$d\beta - \gamma d\alpha = o\,,$$

die integrirt, auf die Gleichungen

$$\beta = \varphi(\alpha) \text{ und } \gamma = \varphi_1(\alpha)$$

führt, wo $\varphi(\alpha)$ eine willkürliche Funktion und $\varphi_1(\alpha)$ den Differenzialquotienten dieser Funktion nach α repräsentirt.

Ersetzt man in diesen Gleichungen α, β, γ den obigen drei Gleichungen (10) gemäss, als Funktionen von x, y, z, p, q und w', so hat man die allgemeinen zwei Integralgleichungen der gemeinen Differenzialgleichung Ausgangs vorangehender Nr.; und da das Eliminationsergebniss von w' aus diesen beiden Integralgleichungen nothwendig die $\beta = \varphi(\alpha)$ sein wird — weil nämlich α und β, wie aus (10) hervorgeht, von w' independent sind —, so ist diese Gleichung die Integralgleichung erster Ordnung der gegenwärtig in Rede stehenden partiellen Differenzialgleichung zweiter Ordnung.

Zieht man sonach α und β aus den beiden ersteren der Gleichungen (10), so stellt sich die Gleichung:

$$\frac{q-(ax+bz)(a+bp+cq)}{1+(cx-by)(a+bp+cq)}=\varphi\left\{\frac{p+(ay+cz)(a+bp+cq)}{1+(cx-by)(a+bp+cq)}\right\}, \qquad (11)$$

in der φ ein willkürliches Funktionszeichen des innerhalb den Klammern enthaltenen Ausdruckes vorstellt, als Integralgleichung erster Ordnung der partiellen Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$s^2 - rt = (a+bp+cq)^4$$

heraus, wo a, b, c beliebige Constante sind.

3. Der unmittelbar vorher aufgestellten Integralgleichung erster Ordnung kann Behufs weiterer Behandlung eine einfachere Form gegeben werden, deren Mittheilung wir die vorliegende Nr. bestimmen.

Führt man für die absoluten Variabeln x und y zwei neue x' und y' mittelst folgenden Gleichungen ein:

$$ax + bz = x', \quad ay + cz = y',$$

die auch folgende darbieten:

$$cx' - by' = a(cx-by),$$

so ersieht man zunächst, dass, damit x' und y' von einander unabhängig verbleiben, die allgemeine Constante a einen von Null verschiedenen Werth vorstellen muss.

Dieses nun festgestellt, bezeichnen wir die partiellen Differenzialquotienten von z nach x' und y' bezüglich durch p' und q', und um diese durch p und q wie umgekehrt auszudrücken, schlagen wir folgenden Weg ein.

Wird nämlich z als Funktion von x' und y' angesehen, so hat man für das totale Differenzial von z die Gleichung:

$$dz = p'dx' + q'dy';$$

man hat aber:

$$dx' = adx + bdz, \quad dy' = ady + cdz,$$

daher ist auch

$$(1 - bp' - cq')\,dz = a(p'dx + q'dy);$$

anderseits hat man aber auch:

$$dz = pdx + qdy,$$

sonach ergibt sich

$$p = \frac{ap'}{1-bp'-cq'}, \quad q = \frac{aq'}{1-bp'-cq'}$$

wie auch umgekehrt:

$$p' = \frac{p}{a+bp+cq}, \quad q' = \frac{q}{a+bp+cq}.$$

Dieses auch vorausgesetzt, geht die in vorangehender Nr. gewonnene Integralgleichung erster Ordnung (11) in folgende über:

$$\frac{a(q'-x')}{1-b(p'+y')-c(q'-x')} = \varphi\left\{\frac{a(p'+y')}{1-b(p'+y')-c(q'-x')}\right\};$$

bedenkt man die Willkürlichkeit der durch φ angedeuteten Funktion, wie den Umstand, dass gegenwärtig a verschieden von Null gedacht werden muss, so erkennt man aus dieser Gleichung, dass $q'-x'$ eine willkürliche Funktion von $p'+y'$ sein muss. Restituirt man die Grössen x', y', p', q' durch ihre Werthe, so erkennt man die Gleichung

$$\frac{q}{a+bp+cq} - (ax+bz) = \varphi\left(\frac{p}{a+bp+cq} + ay + cz\right), \qquad (12)$$

in der φ eine willkürliche Funktion vorstellt, als die Integralgleichung erster Ordnung der partiellen Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$s^2 - rt = (a+bp+cq)^4, \qquad (13)$$

wo a, b, c beliebige Constante sind, unter denen a jedoch von Null verschieden ist.

Verbindet man das Ergebniss in (12) mit dem in vorangehender Nr. in (11) aufgestellten, so gelangt man auch, beachtend die willkürlichen Funktionen auf folgendes Resultat:

$$\frac{p}{a+bp+cq} + ay + cz = \varphi'\left(\frac{1}{a+bp+cq} + cx - by\right), \qquad (12')$$

wo φ' ebenfalls eine willkürliche Funktion bedeutet, wie endlich auch auf folgendes:

$$\frac{q}{a+bp+cq} - (ax+bz) = \varphi''\left(\frac{1}{a+bp+cq} + cx - by\right), \qquad (12'')$$

wo auch φ'' eine willkürliche Funktion bedeutet.

Diese drei Gleichungen sind unter einander gleichbedeutend und jede stellt die Integralgleichung erster Ordnung der partiellen Differenzialgleichung in (13) in der ganzen Allgemeinheit dar, falls keine der drei Constanten a, b, c der Null gleich ist.

Wenn aber $a = o$ ist, dann ist die Gleichung in (12) auszuschliessen; wogegen jede der beiden andern Gleichungen (12') oder (12'') eine brauchbare und allgemeinste Integralgleichung vorstellt, falls nicht zugleich b und c ebenfalls Nullwerthe haben.

Wenn neben $a = o$ auch $b = o$ ist, dann wird die Gleichung (12') die allgemeinste Integralgleichung erster Ordnung darbieten.

Wenn hingegen neben $a=o$ auch $c=o$ ist, dann wird die Gleichung (12″) das allgemeinste Integrationsergebniss erster Ordnung darbieten.

Ist endlich a von Null verschieden, und $b=o$ wie $c=o$, dann bietet lediglich die Gleichung (12) das allgemeinste Resultat dar.

4. Wir bestimmen die vorliegende Nr. zur Angabe der endlichen Integralgleichungen je des einen oder andern in vorangehender Nr. vorgeführten besondern Falles.

a) Es sei $b=o$, $c=o$ und a eine von Null verschiedene Constante. — In diesem Falle geht die Gleichung (12) über in

$$q = a^2x + a\varphi\left(\frac{p}{a} + ay\right),$$

oder wenn die willkürliche Funktion $\varphi(\mu)$ durch $2\varphi_1(\mu)$ ersetzt wird, wo $\varphi_1(\mu)$ den Differenzialquotienten einer willkürlichen Funktion $\varphi(\mu)$ nach μ vorstellt, wodurch man die Differenzialgleichung erster Ordnung:

$$q = a^2x + 2a\varphi_1\left(\frac{p}{a} + ay\right) \tag{14}$$

zu integriren hat; so gelangt man, wenn nach (Ir. Nr. 690) verfahren wird, auf folgende zwei endliche Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} z &= xp + \varphi\left(\frac{p}{a} + ay\right) + \psi\left(\frac{p}{a} - ay\right) \\ o &= x + \frac{1}{a}\varphi_1\left(\frac{p}{a} + ay\right) + \frac{1}{a}\psi_1\left(\frac{p}{a} - ay\right), \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

in denen φ dieselbe willkürliche Funktion wie in (14), und ψ eine neue willkürliche Funktion vorstellt. Das Eliminationsergebniss von p aus diesen zwei Gleichungen stellt die allgemeinste endliche Integralgleichung der partiellen Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$s^2 - rt = a^4 \tag{a'}$$

vor, wo überall a eine angebbare Constante ist.

b) Es sei $a=o$ und $c=o$, b aber eine angebbare Constante. — In diesem Falle unterlegen wir die Gleichung (12″), die nunmehr in folgende übergeht:

$$q = b^2zp + bp\,\varphi''\left(\frac{1}{bp} - by\right); \tag{15}$$

ersetzt man auch hier die willkürliche Funktion $\varphi''(\mu)$ durch $2\varphi_1(\mu)$, wo $\varphi_1(\mu)$ der Differenzialquotient einer willkürlichen Funktion $\varphi(\mu)$ nach μ ist, so hat man auch:

$$q = b^2zp + 2bp\,\varphi_1\left(\frac{1}{bp} - by\right).$$

Diese partielle Differenzialgleichung erster Ordnung führt auf folgende Integralgleichungen:

$$\frac{z}{p} - x + \varphi\left(\frac{1}{bp} - by\right) = \psi\left(\frac{1}{bp} + by\right)$$

$$bz + \varphi_1\left(\frac{1}{bp} - by\right) = \psi_1\left(\frac{1}{bp} + by\right),$$

aus denen p zu eliminiren ist, und in denen φ und ψ willkürliche Funktionen sind. Eliminirt man bp oder besser $\frac{1}{bp}$ aus diesen Gleichungen, so gelangt man auf dasselbe Endergebniss; ersetzt man sonach $\frac{1}{bp}$ durch λ, so gehen die eben aufgestellten zwei Gleichungen in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} b\lambda z - x + \varphi(\lambda - by) &= \psi(\lambda + by), \\ bz \quad + \varphi_1(\lambda - by) &= \psi_1(\lambda + by), \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

aus welchen λ zu eliminiren ist. Das Eliminationsergebniss von λ stellt dann die endliche Integralgleichung der partiellen Differenzialgleichung zweiter Ordnung vor:

$$s^2 - rt = b^4p^4, \qquad (b')$$

wo in dieser wie in den vorhergehenden b eine angebbare Constante ist.

Vertauscht man in diesen Gleichungen (b) und (b') die Variabeln x und y mit einander, so gelangen wir auch auf folgendes Resultat: Die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} c\lambda z - y + \varphi(\lambda - cx) &= \psi(\lambda + cx), \\ cz \quad + \varphi_1(\lambda - cx) &= \psi_1(\lambda + cx), \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

geben nach Elimination von λ die Integralgleichung folgender partiellen Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$s^2 - rt = c^4q^4, \qquad (c')$$

wo auch c jede angebbare Constante vorstellen darf.

c) Es sei $a = o$, b und c hingegen stellen angebbare Constante vor. — Bei dieser Annahme kann eine der Gleichungen (12') oder (12'') unterlegt werden. Erklären wir uns für letztere und ersetzen die willkürliche Funktion $\varphi''(\mu)$ durch $2\varphi_1(\mu)$, wo $\varphi_1(\mu)$ den Differenzialquotienten einer willkürlichen Funktion $\varphi(\mu)$ nach μ vorstellt, so geht besagte Gleichung (12'') über in

$$\frac{q}{bp+cq} - bz = 2\varphi_1\left(\frac{1}{bp+cq} + cx - by\right). \qquad (16)$$

Aus dieser soll nun q gezogen und in die gemeine Differenzialgleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

eingeführt werden; da aber dieses wegen der willkürlichen Funktion nicht angeht, so ziehen wir aus derselben z und führen das Ergebniss von dz in diese letztere ein. Hiedurch gelangen wir auf folgende gemeine, lineare Differenzialgleichung:

$$[bp + 2c\varphi_2(w)]\,dx + b[q - 2\varphi_2(w)]\,dy + \frac{b[q-2\varphi_2(w)]}{(bp+cq)^2}\,dp - \frac{[bp+2c\varphi_2''(w)]}{(bp+cq)^2}\,dq = o\,, \qquad (17)$$

wo der Kürze der Darstellung wegen:

$$w = \frac{1}{bp+cq} + cx - by \qquad (\alpha)$$

gesetzt worden ist.

Diese Gleichung (17) zwischen den vier Variabeln x, y, p, q ist jedesmal durch ein System zweier Gleichungen zwischen denselben Variabeln zu integriren möglich, welche, wenn hergestellt, in Verbindung mit (16) durch Elimination von p und q die verlangte endliche Integralgleichung zwischen x, y und z darbieten werden.

Wir führen zur Vereinfachung der Gleichung (17) neben der Variabeln w aus Gleichung (α) noch eine neue u mittelst der Gleichung:

$$bp + cq = \frac{1}{u} \qquad (\beta)$$

ein, wodurch die Differenzialgleichung (17) folgende einfachere Form annimmt:

$$dx - u^2 dq + [2\varphi_2(w) - q]\,u\,dw = o.$$

Diese Differenzialgleichung zwischen den vier Variabeln, x, q, w, u nach (Ir. Nr. 657 u. d. f.) behandelt, bietet folgende zwei Integralgleichungen dar:

$$x - qu^2 + 2u\varphi_1(w) - \varphi(w) = -\psi(w - 2u),$$
$$qu - \varphi_1(w) = -\psi_1(w - 2u),$$

wo ψ ein neues Funktionszeichen vorstellt. Ersetzt man hier w und u aus den obigen Gleichungen (α) und (β), so gelangt man auf:

$$\varphi\left(cx-by+\frac{1}{bp+cq}\right)-\psi\left(cx-by-\frac{1}{bp+cq}\right)=x-\frac{q}{(bp+cq)^2}+\frac{2}{(bp+cq)}\varphi_1\left(cx-by+\frac{1}{bp+cq}\right),$$

$$\varphi_1\left(cx-by+\frac{1}{bp+cq}\right)-\varphi_1\left(cx-by-\frac{1}{bp+cq}\right)=\frac{q}{bp+cq},$$

welche die allgemeinsten Integralgleichungen der linearen Differenzialgleichung in (17) sind.

Diese Gleichungen hat man noch mit den in (16) durch Elimination von p und q, oder auch von bp+cq und q, zu verbinden. Ersetzt man nun zu diesem Zwecke bp+cq durch $\frac{1}{u}$, und q durch v; so hat man aus folgenden drei Gleichungen

$$\varphi(cx-by+u)-\psi(cx-by-u)=x-vu^2+2u\varphi_1(cx-by+u),$$
$$\varphi_1(cx-by+u)-\psi_1(cx-by-u)=vu,$$
$$2\varphi_1(cx-by+u)=vu-bz,$$

die beiden Grössen u und v zu eliminiren. Eliminirt man in der That letztere, so verbleiben noch folgende zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} buz-x+\varphi(cx-by+u)&=+\psi(cx-by-u),\\ bz+\varphi_1(cx-by+u)&=-\psi_1(cx-by-u),\end{aligned}\right\} \quad (d)$$

welche nach Elimination von u die allgemeinste endliche Integralgleichung der partiellen Differenzialgleichung zweiter Ordnung:

$$s^2-rt=(bp+cq)^4 \quad (d')$$

darbieten.

Wird zur Verification dieses Ergebnisses $c=0$, $u=\lambda$ gesetzt, und die willkürliche Funktion $\psi(-\mu)$ durch $-\psi(\mu)$ ersetzt, so gelangt man genau auf den in b) behandelten Fall.

Bedenkt man ferner, dass die Gleichung (d') unverändert bleibt, wenn man x mit y und zugleich b mit c vertauscht, so folgt, dass man dieselben Vertauschungen auch mit den Gleichungen (d) vornehmen darf; wodurch auch folgende zwei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} cuz-y+\varphi(by-cx+u)&=\psi(by-cx-u),\\ cz+\varphi_1(by-cx+u)&=-\psi_1(by-cx-u),\end{aligned}\right\} \quad (d_1)$$

nach Elimination von u aus denselben die verlangte allgemeine Integralgleichung darbieten werden.

d) Es verbleibt uns noch die letzte Annahme, wenn keine der drei Constanten a, b, c den Nullwerth annimmt, womit wir uns nunmehr noch beschäftigen werden.

Legt man hier ebenfalls die Gleichung (12″) zu Grunde und verfährt ganz wie im vorangehenden Falle geschah, mit der einzigen Abweichung, dass man gegenwärtig:

$$a + bp + cq = \frac{1}{u}$$

wie auch:

$$w = cx - by + \frac{1}{a+bp+cq}$$

setzt; so gelangt man zuletzt auf folgende drei Gleichungen:

$$\varphi(cx-by+u) - \psi(cx-by-u) = x - vu^2 + 2u\,\varphi_1(cx-by+u),$$

$$\varphi_1(cx-by+u) - \psi_1(cx-by-u) = vu,$$

$$2\varphi_1(cx-by+u) = vu - ax - bz,$$

aus denen u und v zu eliminiren ist. Wird auch hier letztere eliminirt, so gelangt man auf:

$$\left.\begin{aligned} u(ax+bz) - x + \varphi(cx-by+u) &= \psi(cx-by-u), \\ ax + bz + \varphi_1(cx-by+u) &= -\psi_1(cx-by-u), \end{aligned}\right\} \qquad (e)$$

die nach Elimination von u eine zwischen x, y, z bestehende Gleichung herbeiführen, die die allgemeinste endliche Integralgleichung der partiellen Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$s^2 - rt = (a+bp+cq)^4 \qquad (e')$$

abgibt.

Vertauscht man in (e) x mit y und zugleich b mit c, so stellen auch folgende zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} u(ay+cz) - y + \varphi(by-cx+u) &= \psi(by-cx-u), \\ ay + cz + \varphi_1(by-cx+u) &= -\psi_1(by-cx-u), \end{aligned}\right\} \qquad (e_1)$$

nach Elimination von u die allgemeinste Integralgleichung derselben partiellen Differenzialgleichung zweiter Ordnung dar.

4. Nachdem nun der Fall, wenn in Gleichung (a) Eingangs dieser Abhandlung der Ausdruck rechterhand vom Gleichheitszeichen der Form $(a+bp+cq)^4$ ist, unter allen möglichen Annahmen über die drei Constanten a, b, c vollständig erledigt worden, gehen wir nun zu den noch übrigen gedenkbaren Annahmen, die M in Gleichung (a) eingehen kann, über, bei welchen nämlich besagte partielle Differenzialgleichung (a) einer Integralgleichung erster Ordnung noch fähig ist.

Wenn nämlich N aus Nr. 1 einer andern Form als der linearen $a+bp+cq$ ist, kann die Gleichung (1′) allerdings durch ein System zweier Gleichungen nicht integrirt werden, womit jedoch noch die Un-

möglichkeit, bei einer andern Annahme über N das Endziel zu erreichen, nicht ausgesprochen werden darf. — Die durch N bezeichnete Funktion von p und q kann nämlich auch der Beschaffenheit sein, dass die zwei Gleichungen in (4) unter einander gleichbedeutend werden, wozu lediglich die Realisirung folgender Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{d^2N}{dp\,dq}\right)^2 - \frac{d^2N}{dp^2}\frac{d^2N}{dq^2} = o \qquad (18)$$

nöthig ist, d. h. N ist eine Funktion von p und q (Ir. Nr. 717), die das Eliminationsergebniss von α aus folgenden zwei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} N &= \alpha q + p\varphi(\alpha) + \psi(\alpha), \\ o &= q + p\varphi_1(\alpha) + \psi_1(\alpha) \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

darbietet, wo $\varphi(\alpha)$ und $\psi(\alpha)$ willkürliche Funktionen von α, wie $\varphi_1(\alpha)$ und $\psi_1(\alpha)$ bezüglich ihre Differenzialquotienten nach α bedeuten.

Aus diesen Gleichungen zieht man:

$$\frac{dN}{dp} = \varphi(\alpha), \quad \frac{dN}{dq} = \alpha,$$

$$\frac{d^2N}{dp^2} = \varphi_1(\alpha)\frac{d\alpha}{dp}, \quad \frac{d^2N}{dp\,dq} = \varphi_1(\alpha)\frac{d\alpha}{dq} = \frac{d\alpha}{dp}, \quad \frac{d^2N}{dq^2} = \frac{d\alpha}{dq};$$

folglich geht jede der erwähnten Gleichungen (4) in folgende einzige über:

$$\varphi_1(\alpha) + w' = o.$$

Führt man den hieraus gefolgerten Werth von w' in die Gleichung (1') ein, ersetzt L, N, q, nach den Gleichungen (19), wodurch man auf folgende lineare Differenzialgleichung zwischen den fünf Variabeln x, y, z, α, und p geführt wird:

$$\psi'(\alpha)dx + [\varphi(\alpha)\psi_1(\alpha) - \psi(\alpha)\varphi_1(\alpha)]dy + \varphi'(\alpha)dz + \\ + \frac{p\varphi_2(\alpha) + \psi_2(\alpha)}{p\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)}d\alpha = o, \qquad (20)$$

in der Kürze halber:

$$\varphi'(\alpha) = \varphi(\alpha) - \alpha\varphi_1(\alpha) \text{ und } \psi'(\alpha) = \psi(\alpha) - \alpha\psi_1(\alpha) \qquad (21)$$

einstweilen gesetzt worden ist; — so haben wir die Bedingungen festzustellen, unter welchen diese lineare Differenzialgleichung (20) durch eine Gleichung integrabel ist. In den Fällen nämlich, wo diese Integralgleichung erhältlich, erfahren wir mit Hülfe der ersten Gleichung in (19) die Form von N, und die zweite dieser Gleichungen in (19) gibt dann verbunden mit der einen, eben erwähnten Integralgleichung nach Elimination von α aus denselben die Integralgleichung

erster Ordnung der nunmehr in Rede stehenden partiellen Differenzialgleichung zweiter Ordnung (a).

Führt man die Untersuchung, betreffend die Integrabilität der Differenzialgleichung (20) durch eine einzige Gleichung nach (Ir. Nr. 653, Gl. 5), so gelangt man bald zur Ueberzeugung, dass folgende einzige Bedingungsgleichung

$$\frac{\psi_2(\alpha)}{\psi'(\alpha)} = \frac{\varphi_2(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} \tag{22}$$

zu bestehen hat. Multiplicirt man beiderseits mit $-\alpha d\alpha$ und bedenkt die Vereinfachungsgleichungen (21), so hat man auch

$$\frac{d\cdot\psi'(\alpha)}{\psi'(\alpha)} = \frac{d\cdot\varphi'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)},$$

die durch Integration auf

$$\psi'(\alpha) = C\varphi'(\alpha)$$

führt, wo C eine allgemeine von α independente Constante ist. Ersetzt man hier $\psi'(\alpha)$ und $\varphi'(\alpha)$ den Gleichungen (21) gemäss, so gelangt man auch auf:

$$\alpha\psi_1(\alpha) - \psi(\alpha) = C\cdot(\alpha\varphi_1(\alpha) - \varphi(\alpha));$$

wird hier beiderseits mit $\frac{d\alpha}{\alpha^2}$ multiplicirt, und hierauf integrirt, so gelangt man nach abermaliger Integration auf:

$$\frac{\psi(\alpha)}{\alpha} = C\cdot\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} + C',$$

oder auf

$$\psi(\alpha) = C\varphi(\alpha) + C'\alpha, \tag{23}$$

wo C und C' allgemeine Constante bedeuten.

Führt man in der That diese Bestimmung der willkürlichen Funktion $\psi(\alpha)$ in die lineare Differenzialgleichung (20) ein, so geht sie sehr leicht in folgende über:

$$C\,dx + C'dy + dz + \frac{\varphi_2(\alpha)d\alpha}{\varphi'(\alpha)^2} = 0, \tag{24}$$

die augenblicklich durch eine Gleichung integrabel erkannt wird.

Um zum Endziel unseres Vorhabens zu gelangen, führen wir die Bestimmung von $\psi(\alpha)$ aus Gleichung (23) in die Gleichungen (19) ein, wodurch wir auf:

$$N = (q+C')\,\alpha + (p+C)\,\varphi(\alpha),$$
$$0 = q+C' \quad + (p+C)\,\varphi_1(\alpha)$$

gelangen. Aus der zweiten ziehen wir:

$$\varphi_1(\alpha) = -\frac{q+C'}{p+C'} \qquad (25)$$

aus welcher

$$\alpha = f_1(\lambda) \qquad (26)$$

gefolgert wird, wo der Kürze wegen

$$\lambda = \frac{q+C'}{p+C} \qquad (27)$$

gesetzt, und $f_1(\lambda)$ den Differenzialquotienten irgend einer willkürlichen Funktion von α, nämlich $f(\alpha)$, nach α vorstellt. Es folgt nun aus (25) und (26)

$$\varphi_1(f_1(\lambda)) = -\lambda;$$

und wenn man beiderseits mit $f_2(\lambda)d\lambda$ multiplicirt, und hierauf nach λ integrirt, gelangt man auf:

$$\varphi(f_1(\lambda)) = -\lambda f_1(\lambda) + f(\lambda)$$

oder auch beachtend (26):

$$\varphi(\alpha) = f(\lambda) - \alpha\lambda. \qquad (28)$$

Mit Hülfe dieses Ergebnisses geht die obige Bestimmungsgleichung für N über in:

$$N = (p+C)f(\lambda)$$

oder auch

$$N = (p+C)\, f\left(\frac{q+C'}{p+C}\right); \qquad (29)$$

so dass N eine homogene Funktion des ersten Grades der beiden Binomen $p+C$ und $q+C'$ ist. Es geht also die in (a) Eingangs dieser Abhandlung unterlegte partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung über in:

$$s^2 - rt = (p+C)^4 f\left(\frac{q+C'}{p+C}\right)^4,$$

wo C und C' allgemeine Constante sind, deren Integralgleichung erster Ordnung aus (24) gezogen sich folgendermassen zunächst darstellt.

$$z + Cx + C'y + \int \frac{\varphi_2(\alpha)d\alpha}{\varphi'(\alpha)^2} = o.$$

Bedenkt man, dass die Gleichungen (25) und (27) folgende geben:

$$\varphi_1(\alpha) = -\lambda,$$

aus der erstens durch Differenziation folgende:

$$\varphi_2(\alpha)\, d\alpha = -d\lambda$$

und in Verbindung mit (28) folgende gezogen wird:

$$\varphi'(\alpha) = \varphi(\alpha) - \alpha\varphi_1(\alpha) = f(\lambda);$$

so geht die vorhin erwähnte Integralgleichung erster Ordnung über in.

$$z + Cx + C'y = \int \frac{d\lambda}{f(\lambda)^2} .$$

Alles in dieser Nr. Gewonnene zusammengestellt, stellt sich Folgendes heraus: Die partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$s^2 - rt = (p+C)^4 f(\lambda)^4 , \qquad (f)$$

wo man $\lambda = \frac{C'+q}{C+p}$ gesetzt, bietet die Integralgleichung erster Ordnung

$$z + Cx + C'y = \int \frac{d\lambda}{f(\lambda)^2} \qquad (f')$$

dar, wo $f(\lambda)$ jedwede Funktion von λ bedeutet.

Vertauscht man hier überall x mit y, also auch p mit q, wie r mit t; so hat man, wenn noch C mit C' gegenseitig vertauscht wird, für die partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung:

$$s^2 - rt = (q+C')^4 f(\mu)^4 , \qquad (g)$$

wo $\mu = \frac{C+p}{C'+q}$ ist, folgende Integralgleichung erster Ordnung:

$$z + Cx + C'y = \int \frac{d\mu}{f(\mu)^2} , \qquad (g')$$

wo auch hier $f(\mu)$ eine willkürliche Funktion von μ ist.

Anmerkung. Während die Gleichung (f'), wie man sich durch partielles Differenziren derselben überzeugt, als eine Genüge thuende Integralgleichung zur Gleichung zweiter Ordnung in (f) in der That erkannt wird, gelangt man auch zur Einsicht, dass dieselbe Gleichung (f') als eine noch allgemeinere Integralgleichung erster Ordnung zu folgender linearer partieller Differenzialgleichung zweiter Ordnung:

$$\lambda^2 r - 2\lambda s + t = o \qquad (h)$$

steht, wo λ dieselbe Bedeutung wie oben hat, nämlich gleich $\frac{C'+q}{C+p}$ ist. Die grössere Allgemeinheit erkennt man daraus, dass die Gleichung (f') eine willkürliche Funktion $f(\lambda)$ umfasst, die in dieser der zweiten Ordnung (h) nicht vorkommt.

MISCELLEN.*)

a. Ueber die Beschaffenheit des Produkts zweier Zahlen mit beliebigen Vorzeichen.

Die bisherige elementare Erklärungsweise des Produktes zweier Zahlen, als des Ergebnisses der wiederholten Addition einer derselben, war wohl in dem Falle, wo der Multiplicator positiv vorausgesetzt wird, zur Erklärung des Vorzeichens im Produkte ausreichend. Mehr Mühe hatte man dagegen in dem Falle, wo der Multiplicator negativ sein soll. Der tüchtigste Schulmann musste hier mitunter in Verlegenheit kommen. Man nahm bei der Erklärung gewöhnlich zur Umschreibung des Wortes addiren oder summiren seine Zuflucht und ersetzte dasselbe z. B. durch finden oder erzeugen; ferner achtete man hiebei zu wenig auf den Ursprung der negativen Zahlen, als Resultate der Subtraction, wodurch am Ende die ganze Erklärungsweise in Unbestimmtheit auslief. Nun glaube ich kann diese Lücke passend durch folgende Erklärung ausgefüllt werden:

Zwei Zahlen mit einander multipliziren heisst, die eine so oft als Addendus oder Subtrahendus setzen, als die andere positive oder negative Einheiten beziehungsweise enthält.

Um aus dieser Erklärung die Folgen für den besprochenen Fall der Multiplication bequem ziehen zu können, erinnern wir an die in der Addition und Subtraktion gewonnenen Sätze:

1) Eine negative Zahl addiren ist soviel als die gleich grosse positive subtrahiren,
2) eine negative Zahl subtrahiren ist soviel als die gleich grosse positive addiren.

Angenommen erstens, der Multiplicator sei positiv, so hat man den Multiplicand so oft als Addendus zu nehmen, als der Multiplicator Einheiten hat; also je nachdem der Multiplicand + oder — ist, wird das Produkt auch + oder — sein.

Angenommen zweitens, der Multiplicator sei negativ, so haben wir den Multiplicand so oft als Subtrahend zu nehmen, als ebenfalls

*) Unter dieser Ueberschrift werde ich in Zukunft kleinere Mittheilungen aus den verschiedensten Theilen der Mathematik machen.

der Multiplicator Einheiten hat; bei positivem Multiplicand also wird man ein negatives, bei negativem Multiplicand ein positives Product erhalten.

Diese Aussagen zusammengefasst geben die bekannten Sätze über das Multipliciren von positiven und negativen Zahlen.

b. Beiträge zur Funktion:

$$\varphi(x) = \frac{x}{1^n} + \frac{x^2}{2^n} + \frac{x^3}{3^n} + \frac{x^4}{4^n} + \frac{x^5}{5^n} + \text{in inf.} \qquad (1)$$

Wenn x kleiner als die Einheit ist, convergirt die Reihe rechterhand bei jeder Verfügung über n, nähert sich aber x ohne Ende der Einheit, dann verlangt die Convergenz derselben Reihe, dass n um eine endliche Grösse die positive Einheit übertreffe.

Die folgende Untersuchung erstreckt sich bloss über die Fälle der Convergenz besagter Reihe.

Dieses vorausgesetzt, multipliciren wir die vorgelegte Gleichheit mit $\Gamma(n)$, so erhalten wir mit Zuziehung der Gleichung (33) der Nr. 216:

$$\Gamma(n)\,\varphi(x) =$$

$$= x\int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}\,du + x^2\int_0^\infty u^{n-1}e^{-2u}\,du + x^3\int_0^\infty u^{n-1}e^{-3u}\,du + \text{in inf.},$$

oder

$$\Gamma(n)\varphi(x) = \int_0^\infty xu^{n-1}e^{-u}\,(1 + xe^{-u} + x^2e^{-2u} + x^3e^{-3u} + \text{in inf.})\,du,$$

oder, wenn x nicht grösser als die Einheit ist, folgendes Resultat:

$$\Gamma(n)\,\varphi(x) = \int_0^\infty \frac{xu^{n-1}e^{-u}}{1 - xe^{-u}}\,du,$$

und durch theilweise Integration zuletzt, wenn n durch n—1 und e^{-u} durch u ersetzt wird:

$$\varphi(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\int_0^1 \log(1-xu)\,(\log u)^{n-2}\frac{du}{u}. \qquad (2)$$

Geht nun hier x in x^k über, und ersetzt man die Integrationsvariable u durch u^k, so hat man, wenn k positiv und reell ist, folgende Gleichheit:

$$\varphi(x^k) = \frac{(-1)^{n-1}k^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\int_0^1 \log(1-x^ku^k)\,(\log u)^{n-2}\,\frac{du}{u}.$$

Stellen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{k-1}$ die von der positiven Einheit verschiedenen Werthe von $\sqrt[k]{1}$ vor, so hat man auch

$$\varphi(x^k) = \frac{(-1)^{n-1}k^{n-1}}{\Gamma(n-1)} \int_0^1 \log\Big[(1-xu)\,(1-\alpha_1 xu)\,(1-\alpha_2 xu)\ldots$$

$$\ldots(1-\alpha_{k-1}xu)\Big](\log u)^{n-2}\frac{du}{u}\,,$$

oder

$$\varphi(x^k) = \frac{(-1)^{n-1}k^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\Big\{\int_0^1 \log(1-xu)\,(\log u)^{n-2}\frac{du}{u}$$

$$+\int_0^1 \log(1-\alpha_1 xu)\,(\log u)^{n-2}\frac{du}{u}+\int_0^1 \log(1-\alpha_2 xu)\,(\log u)^{n-2}\frac{du}{u}+..$$

$$..+\int_0^1 \log(1-\alpha_{k-1}xu)\,(\log u)^{n-2}\frac{du}{u}\Big\}\,.$$

Wendet man auf jedes dieser bestimmten Integrale das Ergebniss in (2) an, so erhält man:

$$\varphi(x^k) = k^{n-1}\Big\{\varphi(x)+\varphi(\alpha_1 x)+\varphi(\alpha_2 x)+\varphi(\alpha_3 x)+\ldots\varphi(\alpha_{k-1}x)\Big\}\,. \quad (3)$$

Stellt noch k eine Primzahl vor, so hat man auch:

$$\varphi(x^k) = k^{n-1}\Big\{\varphi(x)+\varphi(\alpha x)+\varphi(\alpha^2 x)+\varphi(\alpha^3 x)+\ldots\varphi(\alpha^{k-1}x)\Big\}\,, \quad (3')$$

wo α einen der imaginären Werthe von $\sqrt[k]{1}$ darstellt.

Gehen wir wieder zum Ergebnisse in (2) zurück, und ersetzen daselbst einmal x durch e^{xi} und ein andermal durch e^{-xi}, so bietet die Summe folgende Gleichheit dar:

$$\frac{\operatorname{Cos} x}{1^n}+\frac{\operatorname{Cos} 2x}{2^n}+\frac{\operatorname{Cos} 3x}{3^n}+\frac{\operatorname{Cos} 4x}{4^n}+\text{in inf.} =$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\int_0^1 \log(1-2u\operatorname{Cos} x+u^2)\,(\log u)^{n-2}\frac{du}{u}\,.$$

Stellt man nun die Gleichung fest:

$$\psi(x) = \frac{\operatorname{Cos} x}{1^n}+\frac{\operatorname{Cos} 2x}{2^n}+\frac{\operatorname{Cos} 3x}{3^n}+\frac{\operatorname{Cos} 4x}{4^n}+\text{in infin.}$$

so ist

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\int_0^1 \log(1-2u\operatorname{Cos} x+u^2)\,(\log u)^{n-2}\frac{du}{u}\,.$$

Geht rechterhand die Integrationsvariable u in u^k über, und wird dann x durch kx ersetzt, so hat man

$$\psi(kx) = \frac{1}{2}k^{n-1}\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\int_0^1 \log(1-2u^k)\operatorname{Cos} kx+u^{2k}(\log u)^{n-2}\frac{du}{u}\,.$$

Nun ist:

$$1-2u^k\operatorname{Cos} kx+u^{2k}=$$

$$=(1-2u\operatorname{Cos}x+u^2)\left(1-2u\operatorname{Cos}\left(x+\frac{2\pi}{k}\right)+u^2\right)$$

$$\left(1-2u\operatorname{Cos}\left(x+\frac{4\pi}{k}\right)+u^2\right)\left(1-2u\operatorname{Cos}\left(x+\frac{6\pi}{k}\right)+u^2\right)$$

$$\ldots\left(1-2u\operatorname{Cos}\left(x+\frac{2(k-1)\pi}{k}\right)+u^2\right)$$

daher gewinnt man auch folgende interessante Beziehung der Funktion $\psi(x)$:

$$\psi(kx)=k^{n-1}\left\{\psi(x)+\psi\left(x+\frac{2\pi}{k}\right)+\psi\left(x+\frac{4\pi}{k}\right)+\right.$$

$$\left.+\psi\left(x+\frac{6\pi}{k}\right)+\ldots\ \psi\left(x+\frac{2(k-1)\pi}{k}\right)\right\}. \qquad (4)$$

Wenn weiter die oben erwähnten zwei Gleichungen von einander subtrahirt werden, so ergibt sich:

$$2i\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\operatorname{Sin}kx}{k^n}=\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\int_0^1\log\left(\frac{1-ue^{xi}}{1-ue^{-xi}}\right)(\log u)^{n-2}\frac{du}{u}$$

oder

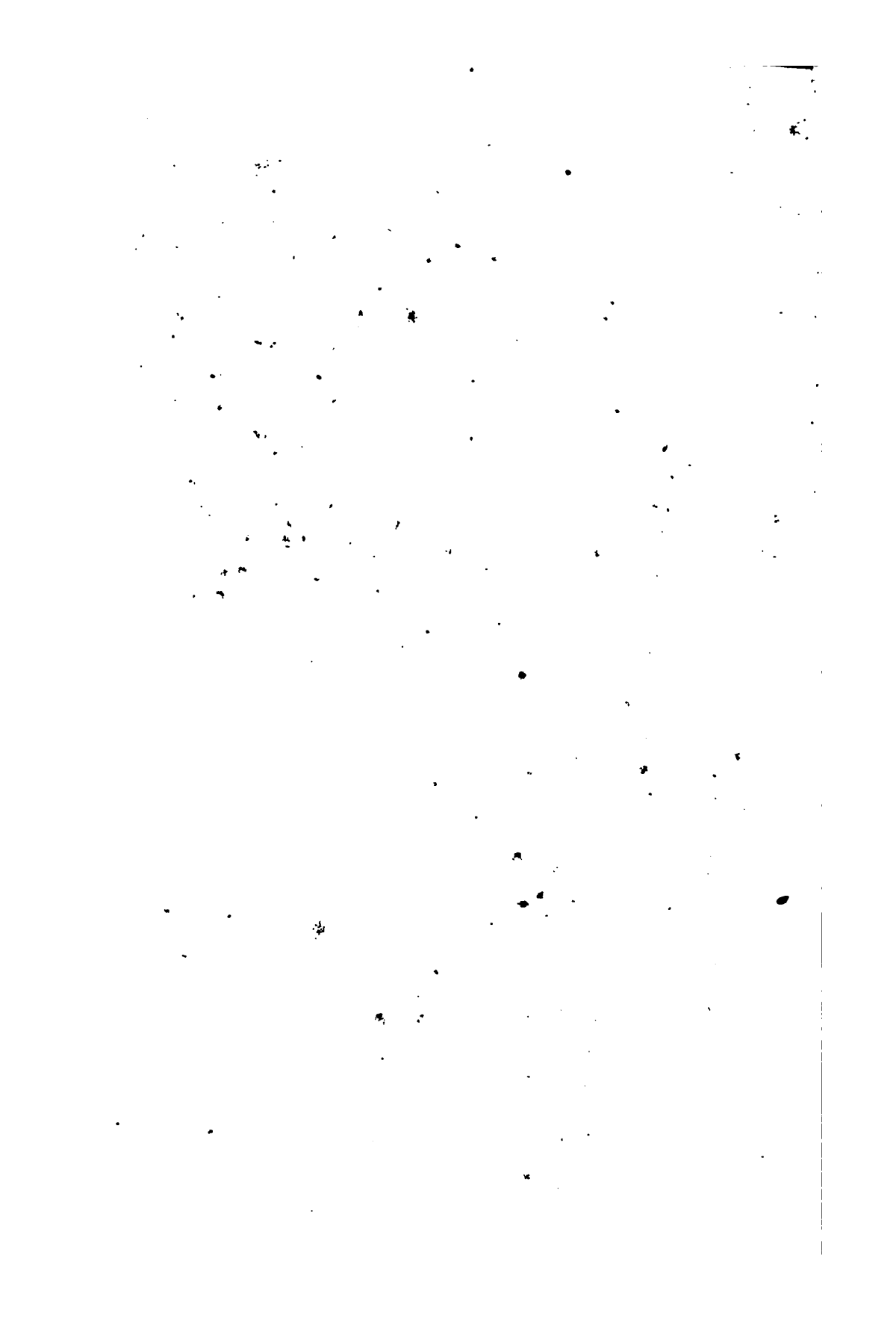
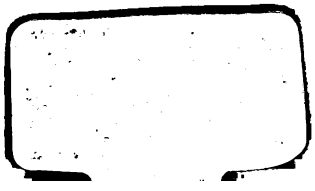
$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\operatorname{Sin}kx}{k^n}=\frac{1}{2i}\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\int_0^1\log\left(\frac{1-u\operatorname{Cos}x-iu\operatorname{Sin}x}{1-u\operatorname{Cos}x+iu\operatorname{Sin}x}\right)(\log u)^{n-2}\frac{du}{u}$$

oder endlich

$$\frac{\operatorname{Sin}x}{1^n}+\frac{\operatorname{Sin}2x}{2^n}+\frac{\operatorname{Sin}3x}{3^n}+\frac{\operatorname{Sin}4x}{4^n}+\text{in inf.}=$$

$$=\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-1)}\int_0^1\operatorname{arctang}\left(\frac{u\operatorname{Sin}x}{1-u\operatorname{Cos}x}\right)(\log u)^{n-2}\frac{du}{u}.$$

Man hat also:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\operatorname{Cos}kx}{k^n}&=\frac{1}{2}\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\int_0^1\log(1-2u\operatorname{Cos}x+u^2)(\log u)^{n-2}\frac{du}{u},\\ \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\operatorname{Sin}kx}{k^n}&=\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-1)}\int_0^1\operatorname{arctang}\frac{u\operatorname{Sin}x}{1-u\operatorname{Cos}x}(\log u)^{n-2}\frac{du}{u},\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

wo noch immer n behufs Convergenz um eine endliche Grösse die positive Einheit zu übertreffen hat.